100문제를 푸는 것보다 문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

원리탐구 Ⅱ · Ⅲ을 이해한(초6 · 중1 · 2)

스토리텔링 · 영재교육원대비

Mathematics

Storytelling Novel Puzzle

저자 최 경호

Ⅰ 상

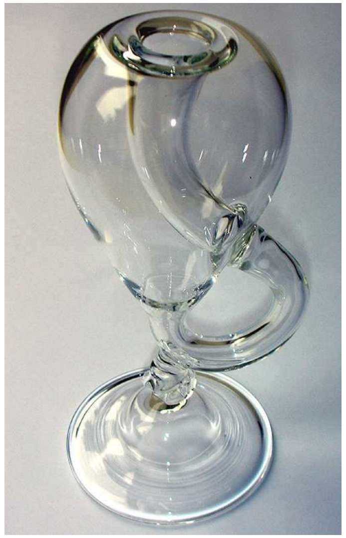
최상위권 학생이 되기 위한
수학적 창의 · 사고 · 상상력 향상 그리고 재미

특별 콘텐츠
콘텐츠 1. 탐구예제 동영상 서비스(www.ml239.com)
콘텐츠 2. 수학소설 6권의 내용을 수학문제집화 하여 수록 및 동영상 서비스
콘텐츠 3. 생활 속의 수학과 풍부한 읽을거리 제공

클라인 병(klein bottle)

홈페이지(www.m1239.com)동영상 강의 및 풀이

원리탐구



클라인 병(Klein bottle)
독일의 수학자 F.클라인이 고안한 바깥쪽과 안쪽을 구별할 수 없는 단측곡면(單側曲面)

SNP Ⅰ (상) 차례

제1편 스토리텔링 문제

제2편 수학소설(6권) 문제

수학문제 · 동영상 수록된 소설목록				
	제목	**지은이**	**출판사**	**동영상 유무**
제 1권	**수학악마(전)**	**하인리히 헴메 지음 안영란 옮김**	**푸른숲 주니어**	***있음***
제 2권	**수학악마(후)**	**하인리히 헴메 지음 안영란 옮김**	**푸른숲 주니어**	***있음***
제 3권	**오늘의 수학**	**이광연**	**동아시아**	***있음***
제 4권	**수학비타민 플러스(전)**	**박경미**	**김영사**	***있음***
제 5권	**수학비타민 플러스(후)**	**박경미**	**김영사**	***있음***
제 6권	**수학의 재미**	**박종하 · 송명진**	**랜덤하우스**	***있음***

	일반 수리 창의력	**읽을거리**
제1강	**1. 소수년 주기로 출현하는 매미가 유리한 점 2. 친화수**	**1. 매미가 태어나는 주기가 소수 년인 이유 2. 친화수**
제2강	**1. 프랑스 오베르뉴 지방의 농민들의 오구단(?)**	**1. 같은 속력의 모터보트와 자동차 중 어느 것이 경주에 이길까?**
제3강	**1. 사다리타기의 비밀 2. 피아노건반과 수학적 원리**	**1. 하노이 탑과 지구의 종말 2. 왜 세 자리씩 끊어 읽는 것일까?**
제4강	**1. 현명한 상속분배 2. 묶인 끈을 자르지 않고, 푸는 방법**	**1. 남녀 쌍둥이를 낳은 부인의 상속분배**

개정판을 내면서

스토리텔링 수학이 2012년 1월 교육과학기술부가 내놓은 수학교육 선진화 방안의 내용에 포함되어 더욱 더 CNP의 효용성이 커짐에 따라 내용의 일부를 교정하고, 수학소설을 최근의 소설로 바꾸는 등 일부의 변화와 오류를 바로 잡아 개정판을 내게 되었습니다. 앞으로 더욱 재미있고, 시대에 부응하는 내용으로 교정할 것을 약속합니다.

2012년 6월 저자 최 경호

재개정판을 내면서

스토리텔링 수학이 2012년 1월 교육과학기술부가 내놓은 수학교육 선진화 방안의 내용에 포함되고 2013년부터 시행됨에 따라 더욱 더 SNP의 효용성이 커져 내용의 일부를 스토리텔링 문제로 교체 교정하고, 수학소설을 최근의 소설로 바꾸는 등 일부의 변화와 오류를 바로 잡아 재개정판을 내게 되었습니다. 앞으로 더욱 재미있고, 시대에 부응하는 내용으로 교정할 것을 약속합니다. **종전의 책이름 CNP를 스토리텔링의 약자인 SNP로 바꾸었습니다.**

2013년 4월 저자 최 경호

머리말

1. 수학 SNP 시리즈를 펴내며

정보통신의 혁명은 교육 분야에 새로운 지식과 상황적응력, 응용력, 창의력과 개성존중 등을 가져왔습니다.
이에 발맞추어 시험방식과 입시제도는 주관식 서술형강화와 더 나아가 논술·구술문제, 심층면접 및 입학사정관제도 등으로 변함에 따라 공부 방법도 변화에 순응 및 앞서가야 합니다.

이러한 변화에 맞추어 수학 원리탐구 시리즈(Ⅰ·Ⅱ·Ⅲ·Ⅳ·Ⅴ)를 출간(2005년 7월)하기 시작한지 벌써 만 5년이 지났습니다. 원리탐구 시리즈는 교육의 내용과 더불어 수학적사고 시스템 및 습관에 중점을 두었다면, 이번 SNPⅠ·Ⅱ·**Ⅲ과 자사고 대비수학은 원리탐구 시리즈의 이해를 바탕으로 제1편 창의성 있는 새로운 문제, 사고력 퀴즈와 퍼즐, 생활 속 수학 문제, 읽을거리와 더불어 제2편 수학소설 문제를 통하여 창의력·잠재력이 요구되는 영재센터 및 입학사정관제에 초점**을 두고 2년여 준비기간을 거쳐 출간하게 되었습니다.

SNP는 스토리텔링(Storyte11ing)·소설(Novel)·퍼즐(Puzzle)의 약자로 소설책의 내용과 주제를 바탕으로 문제를 각색하고 창조하여 붙인 이름입니다.

수학 원리탐구 시리즈가 수학의 기본 원리서로 계속적 보완·교정을 약속하여 실행하고 있듯이, SNP시리즈도 더 만은 연구와 노력을 통한 보완·교정으로 창의력과 잠재력 향상에 도움이 되도록 하겠습니다.

2. 수학 SNP의 중점내용

창의력과 잠재력이 요구되는 영재센터와 다가오는 입학사정관제도를 대비하여 다음과 같은 내용으로 구성되어 있습니다.

(1) 새로운 창의력 문제(원리탐구 시리즈의 이해를 바탕으로 함)
원리탐구 시리즈에서 수학적 사고시스템과 이론을 확립하여 이를 바탕으로 각각의 내용들이 시중에 나와 있는 중요한 문제도 있지만 대부분이 새로운 문제로 구성·전개되어 있으므로 처음 접하는 학생은 매우 생소하고 어려워 보일 수 있습니다. 따라서 학년별로 어려움이 있을 때는 각 단계에 맞은 원리탐구 시리즈를 공부하고 보기 바랍니다.

(2) 소설을 통한 상상력과 간접경험(제2편은 관련된 원작수학소설책 읽기를 권합)
앞에서 제시한 수학책들이 제기한 문제와 주제들을 바탕으로 각색, 창조된 문제들이 많으며, 제2편은 소설속의 내용의 이해를 전제로 한 문제들이 다소 있으므로 문제를 풀기 전에 관련 수학소설책을 읽어야 효율적인 공부가 되며, 관련 원작소설을 통하여 상상력과 수학 관련 간접경험의 중요 부분을 채우기를 권합니다.

(3) 사고력 퀴즈와 퍼즐을 풀면서 재미와 어려운 문제 해결능력
각 단원의 창의력문제 이후에 사고력 퀴즈와 퍼즐을 넣어 문제풀이과정에서 나타날 수 있는 피곤함과 지루함을 없애고 재미를 느낄 수 있도록 사고력 퀴즈와 퍼즐을 두었습니다. 단순한 재미도 느낄 수 있지만 이를 통하여 지식을 넓이고, 어려운 문제를 쉽게 푸는 능력을 배양하는 데에도 목적이 있습니다.

(4) 일반 수리 창의력과 읽을거리에 의한 현실적응·잠재력 향상
각 단원 끝의 일반 수리 창의력과 읽을거리를 통하여 현실적으로 수학이 어떻게 응용·활용되는지를 알게 하도록 하였으며, 이를 통하여 자신에 내재되어있는 능력을 일깨우고 충분히 발휘할 수 있도록 하는 밑거름이 되었으면 하는 바람입니다. 제2편의 소설 속에 수록된 내용과 문제도 있지만, 앞에 참고한 소설 속에 있는 내용을 각색, 창조하여 수록했으며, 그대로 인용하는 경우 출전을 밝혀놓았으므로 관련 원작소설을 통하여 이해도를 높이기 바랍니다. 그러나 인터넷이나 오래된 내용 중에는 출전이 없거나 모르는 경우가 있어 출전을 밝히지 못함을 양해바라며, 혹 밝혀지는 경우 써넣도록 하겠습니다.

3. 수학 SNP의 구성 및 학습대상

수학 SNP시리즈는 수학 SNP Ⅰ·Ⅱ·Ⅲ 6권(각권 상·하)과 자사고 수학 2권(정수·기하/ 해석·조합)으로 총 8권으로 구성되어 있습니다.
SNP Ⅰ·Ⅱ는 각 권당 4단원 7강, SNP Ⅲ은 4단원 7강으로 구성되어 있습니다.
SNP Ⅲ이 가장 낮은 단계이고, SNPⅠ이 높은 단계이며, 상하권은 내용상의 분류입니다. 원리탐구시리즈의 이해를 바탕으로 하는 내용이므로 아래의 표와 같이 원리탐구의 단계별 공부가 되어있어야만 문제를 이해하는데 효율적입니다.

수학 SNP·자사고 대비수학 단계별 대상표

교재명	단원	대상	원리탐구수료 단계
SNPⅠ(상·하)	각권 4단원 7강	초6·중1·2	Ⅱ·Ⅲ
SNPⅡ(상·하)	각권 4단원 7강	초5·6	Ⅲ·Ⅳ
SNPⅢ(상·하)	각권 7단원 7강	초3·4·5	Ⅳ·Ⅴ
자사고 수학 (정수·기하)	11단원 11강	중1·2·3	Ⅰ
자사고 수학 (해석·조합)	11단원 11강	중1·2·3	Ⅰ

4. 맺음말

2년여 동안의 소설읽기와 문제 만들기 및 연구의 산물이 세상에 나오게 되어 기쁨과 더불어 무한한 책임을 느낍니다. 재미있고 유익한 소설책을 써주신 소설가, 교수님, 인터넷 논객, 번역자님들께 감사의 말을 드리고 앞으로 더 많고 좋은 책이 나오기를 기대합니다. 많은 독서와 질 높은 강의, 더 많은 노력을 통하여 더욱 유익하고, 재미있는 수학 CNP가 될 수 있도록 계속적으로 보완·교정해 나갈 것을 약속드립니다. 이 책을 쓰는데 많은 도움과, 동영상 제작에 힘써주신 안 용태, 문 원기 선생께 감사의 마음을 전합니다.

2010년 8월 저자 최 경호

※ 설명에 오류가 있거나 오차, 탈자를 바로잡는 경우, 홈페이지(m1239.co.kr)에 올리겠으므로 참고하시고, 책에 관한 질문이나 의문사항을 올려주시면 사례하겠습니다.

제 1편 스토리텔링문제

클라인 병(Klein bottle)
독일의 수학자 F.클라인이 고안한 바깥쪽과 안쪽을 구별할 수 없는 단측곡면(單側曲面)

제 1강 수와 연산

탐구예제 A

1 탐구예제 원리탐구

윤년(閏年)은 역법과 실제 우주년 또는 계절년의 차이를 맞추기 위해 여분의 하루, 주, 또는 달을 끼우는 해이다. 윤년이 필요한 이유는 우주년이나 계절년은 정수 개의 날(日)로 나누어떨어지지 않기 때문이다. 현재 대부분의 나라에서 사용되고 있는 그레고리력은 정확히 4년마다 윤년이 오는 율리우스력을 수정한 것이다. 그레고리력(1582년 10월 15일부터 시행)의 규칙은 다음과 같다.

1. 서력기원 년도가 4로 나누어떨어지는 해는 우선 윤년으로 한다.
(예, 2008년, 2012년 등)
2. 100으로 나누어떨어지는 해는 평년으로 한다.(예, 2100년, 2200년 등)
3. 400으로 나누어떨어지는 해는 다시 윤년으로 한다.(예, 2000년, 2400년 등)

2013년 1월 1일은 화요일이다. 2056년 1월 1일은 무슨 요일인지 구하여라.(반드시 그레고리력의 규칙을 바탕으로 설명할 것)

풀이 답: 토요일

$2013=4\times503+1$이므로 2013년은 윤년이 아니고 $2056=4\times514$이므로 2056년은 윤년이다.
2013년은 365일이고 $365=7\times52+1$이므로 2014년 1월 1일은 52주가 지나고 1일 이동한 수요일이 된다. 따라서 어떤 해가 윤년이 아닐 경우(평년) 다음 해 1월 1일의 요일은 전년 1월 1일의 요일에서 하루 이동한 요일이 되며, 윤년일 경우에는 1년이 366일이므로 $366=7\times52+2$에서 다음 해 1월 1일의 요일은 전년 1월 1일의 요일에서 2일 이동한 요일이 된다.
$2013=4\times503+1$, $2056=4\times514$이고, $100, 400$으로 나누어떨어지지 않으므로 이론적으로 윤년은 11번 있다. 하지만 11번 중에는 2056년이 포함되어 있는데 윤일 2월 29일은 1월 1일 이후에 있으므로 1년이 366일인 윤년은 10번 있게 된다. 따라서 2056년의 1월 1일은 2013년 1월 1일의 요일에서 $43+10=53$일 이동한 요일이 됨을 알 수 있다.
$53=7\times7+4$이므로 2056년의 1월 1일은 2013년 1월 1일의 요일에서 4일 이동한 토요일이다.

유제 1

(예제 1)에서 2013년 1월 1일이 화요일이라는 것을 알고 있는 상황에서 어떤 해의 1월 1일이 무슨 요일인지를 알아볼 수 있었다. 이제는 좀 더 구체적으로 2013년 4월 26일이 무슨 요일인지 알아보자. 답부터 말한다면 2013년 4월 26일은 금요일이다. 왜냐하면 4월 26일은 1월 1일의 $30+28+31+26=115$일 후이므로 $115=7\times16+3$에서 4월 26일의 요일은 1월 1일의 요일에서 3일 이동한 금요일이 되기 때문이다. 또한 아래의 표(매월 1일을 기준으로 함)에서 4월 1일의 요일은 1월 1일의 요일에서 6일 이동한 요일이고 26일까지 25일 더 이동하므로 $31=7\times4+3$에서 4월 26일은 1월 1일의 요일에서 3일 이동한 월요일이 된다.

월	2월	3월	4월	5월	6월	7월	8월	9월	10월	11월	12월
이동 일 수	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

(예제 1의 결과)를 이용하여 2112년 9월 29일이 무슨 요일인지 구하여라.

(1) 2112년 1월 1일이 무슨 요일인지 구하여라.

(2) 2112년 9월 29일이 무슨 요일인지 구하여라.

(3) 2020년 9월 세 번째 일요일은 며칠인지 구하여라.(반드시 그레고리력의 규칙을 바탕으로 설명할 것)

2 탐구예제

원리탐구

수돌이는 아래와 같이 여섯 가지(A, B, C, D, E, F)종류의 카드를 준비한 다음, 학돌이에게 1에서 63까지 숫자 하나를 마음속으로 생각하라고 한다. 그런 다음 카드를 보여주면서, 숫자가 들어 있는 카드의 문자를 모두 말하라고 한다. 다음 물음에 답하여라.

A	1	3	5	7	9	11	13	15
	17	19	21	23	25	27	29	31
	33	35	37	39	41	43	45	47
	49	51	53	55	57	59	61	63

B	2	3	6	7	10	11	14	15
	18	19	22	23	26	27	30	31
	34	35	38	39	42	43	46	47
	50	51	54	55	58	59	62	63

C	4	5	6	7	12	13	14	15
	20	21	22	23	28	29	30	31
	36	37	38	39	44	45	46	47
	52	53	54	55	60	61	62	63

D	8	9	10	11	12	13	14	15
	24	25	26	27	28	29	30	31
	40	41	42	43	44	45	46	47
	56	57	58	59	60	61	62	63

E	16	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29	30	31
	48	49	50	51	52	53	54	55
	56	57	58	59	60	61	62	63

F	32	33	34	35	36	37	38	39
	40	41	42	43	44	45	46	47
	48	49	50	51	52	53	54	55
	56	57	58	59	60	61	62	63

(1) 카드 A의 공통점은 무엇인가? (2) 29는 어느 카드에 번호가 있는가?

(3) 29는 왜 (2)에 있는 카드에 번호가 있는가?

(4) 만약 학돌이가 A,B,D,F 카드에 자신이 생각하는 숫자가 있다고 했을 때, 학돌이가 마음속으로 생각하고 있는 숫자는 얼마인가?

풀이 답: (1) 풀이참조 (2) A,C,D,E (3) 풀이참조 (4) 43

마술카드를 구성하는 방법은 다음과 같다.

(i) 1부터 63까지 수를 이진법으로 나타낸다.

(ii) 이진법으로 나타낸 수는 0 또는 1로 되어있으며, 이때 $2^0(=1)$의 자리가 1이면 그 숫자를 A, $2^1(=2)$의 자리에 1이 있는 숫자를 B, $2^2(=4)$의 자리에 1이 있는 숫자를 C, $2^3(=8)$의 자리에 1이 있는 숫자를 D, $2^4(=16)$의 자리에 1이 있는 숫자를 E, $2^5(=32)$의 자리에 1이 있는 숫자를 F카드에 써놓았다.

(1) 십진법의 수를 이진법으로 고쳤을 때, 1의 자리에 1이 있는 숫자이다. (2) A,C,D,E

(3) 29를 이진법으로 바꾸면 아래와 같이 $29=11101_{(2)}$이다.

$$29=16+8+4+1=1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1=11101_{(2)}$$

따라서 $A:2^0(=1)$, $C:2^2(=4)$, $D:2^3(=8)$, $E:2^4(=16)$의 자리가 1이 있으므로 A,C,D,E카드에 번호가 있다.

(4) A,B,D,F 의 카드에 번호가 있으므로

위의 설명과 같은 원리로 그 수는 $101011_{(2)}=1\times2^5+1\times2^3+1\times2+1=32+8+2+1=43$이다.

카드	$A(2^0=1)$	$B(2^1=2)$	$C(2^2=4)$	$D(2^3=8)$	$E(2^4=16)$	$F(2^5=32)$
0, 1	1	1	0	1	0	1

유제 2

수돌이는 아래와 같이 여섯 가지(A, B, C, D, E, F)종류의 카드를 준비한 다음, 학돌이에게 1 에서 63 까지의 숫자 하나를 마음속으로 생각하라고 한다. 그런 다음 카드를 보여주면서, 숫자가 들어 있는 카드의 문자를 모두 말하라고 한다. 다음 물음에 답하여라.

A	1	3	5	7	9	11	13	15
	17	19	21	23	25	27	29	31
	33	35	37	39	41	43	45	47
	49	51	53	55	57	59	61	63

B	2	3	6	7	10	11	14	15
	18	19	22	23	26	27	30	31
	34	35	38	39	42	43	46	47
	50	51	54	55	58	59	62	63

C	4	5	6	7	12	13	14	15
	20	21	22	23	28	29	30	31
	36	37	38	39	44	45	46	47
	52	53	54	55	60	61	62	63

D	8	9	10	11	12	13	14	15
	24	25	26	27	28	29	30	31
	40	41	42	43	44	45	46	47
	56	57	58	59	60	61	62	63

E	16	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29	30	31
	48	49	50	51	52	53	54	55
	56	57	58	59	60	61	62	63

F	32	33	34	35	36	37	38	39
	40	41	42	43	44	45	46	47
	48	49	50	51	52	53	54	55
	56	57	58	59	60	61	62	63

(1) 카드 B의 공통점은 무엇인가? (2) 45 는 어느 카드에 번호가 있는가?

(3) 45는 왜 (2)에 있는 카드에 번호가 있는가?

(4) 만약 학돌이가 B, C, F 카드에 자신이 생각하는 숫자가 있다고 했을 때, 학돌이가 마음속으로 생각하고 있는 숫자는 얼마인가?

연속한 수의 합이 될 가능성 판별법

1부터 연속된 수 얼마까지의 합이 주어진 수가 되는 가를 구하고, 주어진 수를 소인수분해하여 그 개수까지 다음과 같이 분석한다.

(1) 연속한 수의 개수가 홀수일 경우

연속한 숫자의 개수로 나누어져야 한다. 즉 연속 세수는 3의 배수, 연속 다섯 수는 5의 배수, 연속 일곱 수는 7의 배수…이여야 한다. 왜냐하면 (중간 수)×(연속한 수의 개수)=(주어진 수)가 되어 중간 수를 중심으로 더하고 뺀 수가 연속하기 때문이다.

문자로 나타내면 다음과 같다.

(ⅰ) 연속한 세 수: $(x-1)+x+(x+1)=3x$

(ⅱ) 연속한 다섯 수: $(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=5x$

⋮

(2) 연속 수의 개수가 짝수일 경우

연속 수를 2로 나눈 몫으로 주어진 수를 나눈 값이 홀수가 되어야 한다. 즉, 연속된 두 수는 $2\div2=1$이므로 홀수이여야 하고, 연속된 네 수는 $4\div2=2$이므로 2로 나누어 홀수가 되어야하며, 연속된 여섯 수는 $6\div2=3$이므로 3로 나누어 홀수…가 되어야한다.

왜냐하면 연속한 수의 개수를 2로 나누면 중간 두수가 되며, 중간 두수가 홀수가 되어야 연속한 두 수가 될 수 있기 때문이다. 문자로 나타내면 다음과 같다.

(ⅰ) 연속한 두 수: $x+(x+1)=2x+1$

(ⅱ) 연속한 네 수: $(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=4x+2=(2x+1)\times2$

(ⅲ) 연속한 여섯 수: $(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=6x+3=(2x+1)\times3$

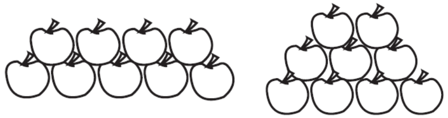
⋮

위와 같은 방법은 연속한 수가 되는지의 여부를 구별하는데 유용하나 일정구간에서 연속한 네 수 또는 여섯 수 등이 몇 개인가를 묻는 경우 즉, '50 부터 100 까지 수 중 연속된 여섯 수의 합으로 나타낼 수 있는 수는 모두 몇 개인가?' 와 같은 문제는 연속한 네 수는 4로 나누어 나머지가 2인 수 $4x+2$, 연속한 여섯 수는 6로 나누어 나머지가 3인 수 $6x+3$, … 를 찾는 경우가 더 편리할 수가 있다.

3 탐구예제 원리탐구

같은 크기의 사과를 한 층씩 위로 쌓을 때마다 1개씩 줄어들도록 한다. 아래 〈보기〉는 이와 같은 방법으로 사과 9개를 쌓을 수 있는 두 가지 경우를 보인 것이다. 사과 45개를 〈보기〉와 같이 여러 가지 방법으로 쌓을 때, 가능한 2층 이상의 층수를 구하여라.

〈보기〉



(2층으로 쌓은 경우) (3층으로 쌓은 경우)

풀이 답: 2, 3, 5, 6, 9

$45=3\times3\times5$ 이고, $1\sim9$까지 합이 45이므로 9층으로 쌓는 것까지 가능성이 있다.
$45=3\times15=5\times9=9\times5$이므로 홀수 층인 $3, 5, 9$층은 가능하다. 즉, 중앙수가 15인 3층, 중앙수가 9인 5층, 중앙수가 5인 9층이 가능하고, 7층은 불가능하다.
나머지 9층 이하의 짝수 층인 $2, 4, 6, 8$층을 알아보자.
(i) 2층으로 쌓는 경우: 45는 홀수이므로 $45=22+23$이다.
(ii) 4층으로 쌓는 경우: $4\div2=2$로 나누어지지 않으므로 불가능하다.
(iii) 6층으로 쌓는 경우: $45=3\times15$이므로 3으로 나눈 값이 15인 홀수이므로 가능하며 $45=5+6+7+8+9+10$이다.
(iv) 8층으로 쌓는 경우: 4의 배수가 아니므로 불가능하다.
따라서 쌓을 수 있는 층은 2, 3, 5, 6, 9이다.

유제 3

150을 연속한 수의 합으로 표시하는 방법은 몇 가지인가?

4 탐구예제 원리탐구

다음과 같은 과녁이 있다. 수돌이가 과녁에 여러 번 화살을 쏘아 맞출 때 나올 수 없는 점수의 합을 구하여라.

풀이 답: 42

모든 자연수를 3으로 나누었을 때 나머지로 분류하면 $3k, 3k+1, 3k+2$로 나눌 수 있다.
따라서 정수를 $3k, 3k+1, 3k+2$로 나누어 8의 배수의 합과 연관하여 분석한다.
(i) 정수가 3의 배수 즉 $3k$일 때, $3, 6, 9, \cdots$ 모두 가능하다.
(ii) 정수가 3으로 나누어 나머지가 1인 수 즉 $3k+1$일 때, $3k+1$은 8을 이용하여 만들어야 한다. $8\times2=16, 16+3=19, 16+6=22, \cdots$이므로 16이상의 $3k+1$인 수는 모두 가능하지만 16미만의 $3k+1$인 수 $16-3=13, 16-3\times2=10, 16-3\times3=7, 16-3\times4=4, 16-3\times5=1$
즉 $1, 4, 7, 10, 13$은 만들 수 없다.
(iii) 정수가 3으로 나누어 나머지가 2인 수 즉 $3k+2$일 때,
$8, 8+3=11, 8+6=14, \cdots$인 수 모두 가능하지만 8미만의 $3k+2$인 수 $8-3=5, 8-3\times2=2$
즉, 2, 5는 만들 수 없다. 따라서 수돌이가 얻을 수 없는 점수는 $1, 2, 4, 5, 7, 10, 13$ 이고, 합은 42이다.

(참고) (1) 나올 수 없는 점수 중에서 $(a, b)=1$일 때, 가장 큰 수는 $a\times(b-1)-b=ab-(a+b)$이다. 예를 들어 17, 11일 경우 $17\times11-(17+11)=187-28=159$이다.
(2) $A=da, B=db$, $(a, b)=1$, A, B의 최대공약수가 d인 경우, 가장 큰 수는 $\{ab-(a+b)\}\times d$이다. 예를 들어 50, 80일 경우 $\{5\times8-(5+8)\}\times10=270$이다.

유제 4

여러 개의 $\boxed{5}$, $\boxed{11}$ 두 가지 카드의 합으로 만들 수 없는 수 중에서 가장 큰 수를 구하여라.

종합문제 A

1. 연속된 여섯 수 $5, 6, 7, 8, 9, 10$의 합은 $5+6+7+8+9+10=45$이다. 따라서 45는 연속된 여섯 수의 합으로 나타낼 수 있다. 50부터 150까지 수 중 연속된 여섯 수의 합으로 나타낼 수 있는 수는 모두 몇 개인가?

2. 옛날에 포악한 왕이 있었다. 이웃 나라의 여왕이 포도주에 독을 타서 악한 왕을 죽이려고 첩자를 보냈다. 다행이 악한 왕의 호위 병사들이 첩자를 잡았다. 그러나 불행히도 첩자는 이미 500병의 포도주 중 딱 한 병에 독을 넣은 다음이었다. 독이 들어간 포도주병이 다른 병과 똑같아서 호위 병사들은 그것을 눈으로 구별할 수 없었다.
포도주에 들어간 독은 맹독이라서 백만 분의 1로 희석해도 여전히 사람을 죽일 수 있으며, 그 독은 한 달이 지나서야 효력이 나타나는 특징을 가지고 있었다.
무자비한 왕의 궁전에서는 5주일 뒤에 큰 잔치가 열리기로 예정되어 있다. 때문에 악한 왕은 자신의 창고에 있는 포도주를 전부 없애버릴 수가 없어 큰 고민에 빠졌다. 한참 동안 고민하다가 마침내 악한 왕은 어쩔 수 없이 죄수들에게 포도주를 조금씩 마시게 하여 독이 든 포도주 병을 찾기로 했다. 왕의 궁전에는 죄수들을 가둔 감옥이 있었는데, 사형수는 10명뿐이었다. 사형수 10명으로 독을 넣은 포도주를 찾을 수 있을까? 가능성여부를 이유를 들어 써라. 만약 가능하다면 몇 명이면 가능한가?

3. 여러 개의 $\boxed{7}$, $\boxed{11}$ 두 가지 카드의 합으로 만들 수 없는 수 중에서 가장 큰 수를 구하여라.

4. 주머니 안에 1부터 200까지 쓰여 있는 숫자 카드가 들어 있다. 그 중 하나를 꺼내 나온 수의 배수에 해당하는 숫자를 아래의 숫자판에서 찾아 그 위에 바둑돌을 1개씩 올려놓는다. 그리고 다시 주머니에서 카드를 꺼내어 나온 수의 배수에 해당하는 숫자 위에 바둑돌을 올려놓는데 이미 바둑돌이 있는 경우에는 그 숫자의 바둑돌을 내려놓는다. 이와 같은 방법으로 주머니 안에 있는 숫자 카드를 모두 꺼냈을 때, 숫자판 위에 남아 있는 바둑돌의 개수를 구하여라.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

5. 각각 62, 64, 67, 73, 96, 99, 128개의 구슬이 들어 있는 7개의 주머니가 있다. 어느 한 주머니에는 파란 구슬만 들어 있고, 다른 6개의 주머니에는 빨간 구슬이 들어있다. A가 4개의 주머니를 갖고, B가 2개의 주머니를 갖고, 파란구슬이 든 주머니는 아무도 갖지 않았다. A가 가진 구슬의 개수가 B가 가진 구슬의 개수의 3배라고 할 때, B가 가진 구슬의 개수를 구하여라.

6. 원리선생님은 일 년 중에서 18일의 화요일에 기분이 좋지 않다. 따라서 일 년 중 기분이 좋지 않는 날이 며칠 동안 있는 지를 알아보려고 한다. 다음 자료는 일 년 동안의 각 달의 날짜수와 전달의 같은 날짜에 비해 요일이 추가된 것을 표시한 표이다. 이표를 보고 물음에 답하여라.

월	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
날짜	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31
요일 추가		3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2

(1) 어느 해 1월 18일이 화요일 이였다면 그해에 18일의 화요일은 몇 월에 있는가?

(2) 1월 18일이 화요일이면 1월 1일은 17일 전이므로 $17=7\times2+3$에서 3일 전과 같아서 토요일이다. 달력을 보지 않고 위의 표를 통하여 1월, 10월의 1일이 토요일인 해의 각 달의 1일의 요일이 같은 달을 다음 표에 넣어라.

요일	월	화	수	목	금	토	일
요일이 같은 달						1, 10	

(3) 위의 표를 통해서 18일의 화요일이 일 년 중에서 가장 많은 날은 며칠인가?

(4) 18일의 화요일이 일 년 중에서 가장 많은 날이 되려면 그 해의 1월 1일은 무슨 요일이여야 하는가?

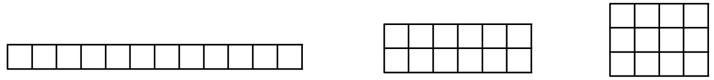
7. 수돌이는 100개가 넘는 방울토마토를 가지고 동물원에 놀려갔다. 첫 번째 우리에는 다람쥐원숭이 3마리, 두 번째 우리에는 긴팔원숭이 5마리, 세 번째 우리에는 개코원숭이 7마리가 있었다. 수돌이가 가지고 있는 방울토마토를 다람쥐원숭이한테만 똑같이 나누어 주면 방울토마토가 2개가 남고 긴팔원숭이게만 똑같이 주면 3개, 개코원숭이에게만 주면 4개가 남는다고 한다. 수돌이가 가지고 있는 방울토마토의 최소의 개수를 구하여라.

8. 2013년 1월 1일은 화요일이라고 한다. 아직 2013년 달력이 없어서 2012년 달력으로 2013년 1월의 달력을 대신하고자 한다. 2012년 달력에서 몇 월의 달력이 2013년 1월의 달력과 똑같은지 구하여라.(단, 2012년은 윤년이다.)

탐구예제 B

5 탐구예제 원리탐구

한 변이 $1cm$ 인 정사각형 12 개로 만들 수 있는 직사각형은 다음의 세 가지이다.



한 변이 $1cm$ 인 정사각형을 이용하여 모두 여섯 가지의 직사각형을 만들려고 할 때, 필요한 정사각형의 개수 중 가장 작은 것을 구하여라.(단, 각 직사각형을 만들 때 한 변이 $1cm$ 인 정사각형을 모두 사용해야 하며, 돌려서 겹치는 직사각형은 한 가지이다.)
(성 13회합)

풀이 **답:** 60개

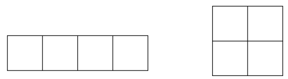
직사각형의 각 변의 길이는 필요한 정사각형 개수의 약수이다. 여섯 가지를 만들려면 약수가 11개 (정사각형 1가지 직사각형 5가지인 경우) 또는 12개(정사각형이 아닌 직사각형만 6가지인 경우)이다.

(ⅰ) 약수가 11개인 경우 최소의 개수는 $2\times2\times\cdots\times2\times2=1024$(개)이고,
약수는 $1, 2, 2\times2, \cdots, \underbrace{2\times2\times\cdots\times2\times2}_{2\text{가 }10\text{개}}$이다.

(ⅱ) 약수가 12개인 경우 최소의 개수는 다음에서 찾을 수 있다.
① $12=6\times2$에서 $2\times2\times2\times2\times2\times3=96$(개)이고, 약수는 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 36, 72$이다.
② $12=4\times3$에서 $2\times2\times2\times3\times3=72$(개)이고, 약수는 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$이다.
③ $12=3\times2\times2$에서 $2\times2\times3\times5=60$(개)이고, 약수는 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$이다.
따라서 60이 가장 작은 개수이고, 이 때 만들 수 있는 직사각형은 $1cm\times60cm$, 2×30, 3×20, 4×15, 5×12, 6×10의 6가지이다.

유제 5

한 변이 $1cm$ 인 정사각형 4 개로 다음과 같이 모두 두 가지의 직사각형을 만들 수 있다.



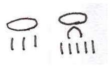
정사각형 한 가지와 정사각형이 아닌 직사각형 네 가지로 모두 다섯 가지의 직사각형을 만들려면, 한 변이 $1cm$ 인 정사각형은 최소 몇 개가 있어야 하는가? (단, 각 직사각형을 만들 때, 정해진 개수의 정사각형을 모두 써야 하며, 돌려서 겹치는 직사각형은 한 가지이다.)

이집트인의 분수 계산

고대 이집트의 수학을 연구하는 데 중요한 자료가 되고 있는 린드(혹은 아메스) 파피루스에는 이집트인들의 분수 사용에 관한 글이 실려 있다.

이집트인들은 단위분수, 즉 분자가 1인 분수만을 다루었는데(예외적으로 $\frac{2}{3}$ 만은 특별한 기호()를 사용하여 표시하였다.) 단위분수는 분모 위에 타원 기호를 씀으로써 이집트의 상형문자로 표시하였고, 분자가 1이 아닌 분수를 표현하기 위해서는 단위분수를 여러 개 붙여서 표현하였다.

예를 들어, $\frac{2}{5}$ 는 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{15}$ $\left(\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)$로 다음과 같이 나타내었다. 이 때, +기호는 사용하지 않았다.



또, $\frac{2}{7}$는 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{28}$ $\left(\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)$로 다음과 같이 나타내었다.

지금이라면 2를 5로 나눌 경우 단순히 $\frac{2}{5}$ 로 표기하지만, 이집트에서는 현실적인 필요(예를 들면 자르는 횟수를 적게 하거나 모든 사람이 같은 크기를 가져가게 한다.) 때문에 일부러 다른 분모를 사용한 단위분수의 합으로 나타내었던 것이다.
이집트인의 이러한 분수 표현법에 대해서는 다음과 같은 해석이 가능하다.

예를 들면, 다섯 사람에게 2개의 빵을 나누어 먹으라고 하면 우선 각 빵을 $\frac{1}{3}$씩 나누어 다섯 사람이 한 조각씩 갖고, 남은 한 조각을 다시 다섯 조각으로 나누어 한 조각씩 가질 것이다. 이 때, 다섯 조각으로 나눈 것은 실제로는 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$로 나눈 것이다.

따라서 한 사람당 $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$을 먹는 셈이다.

6 탐구예제

원리탐구

크기가 같은 빵 7개를 8명의 학생이 공평하게 나누어 먹으려고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) $\frac{7}{8}$을 3개의 단위분수의 합으로 나타내어라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 빵 7개를 8등분하는 방법을 설명하여라.

풀이 답: (1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ (2) 풀이참조

단위 분수의 합이 되려면 분자가 분모의 약수이어야 약분되어 분자가 1이 되며, 합이 분할되기 전의 분수의 분자가 되어야한다.

(1) 분모 8의 약수 중 세 수의 합이 7이 되는 경우를 찾으면 된다. 8의 약수는 1, 2, 4, 8이고 이 중 세 수 1, 2, 4의 합이 7이 된다. 따라서 $\frac{7}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$이다.

(2) 4개의 빵은 각각 2등분($\frac{1}{2}$씩 8조각), 2개의 빵은 각각 4등분($\frac{1}{4}$씩 8조각), 나머지 1개의 빵은 8등분($\frac{1}{8}$씩 8조각)해서 8명에게 세 종류의 빵조각을 하나씩 나누어주면 된다.

유제 6

다음 분수를 두 단위분수의 차와 합으로 나타내려고 한다. A, B에 알맞은 자연수를 각각 구하여라.(단, $A<B$이다.)

(1) $\frac{1}{3}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}$ (2) $\frac{2}{7}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$

7 탐구예제

원리탐구

임진왜란은 임진년인 1592에 일어났고, 정유재란은 정유년인 1597년에 일어났다. 임진년과 정유년과 같이 연도를 나타내는 또 다른 이름의 첫째 글자는 다음과 같은 십간 중에서 하나를 순서대로 따오고, 둘째 글자는 십이지 중에서 하나를 순서대로 따온다.

십간(十干): 갑(甲) 을(乙) 병(丙) 정(丁) 무(戊) 기(己) 경(庚) 신(辛) 임(壬) 계(癸)

십이지(十二支): 자(子) 축(丑) 인(寅) 묘(卯) 진(辰) 사(巳) 오(午) 미(未) 신(申) 유(酉) 술(戌) 해(亥)

그래서 1596년은 병신년, 1598년은 무술년, 1599년은 기해년, 1600년은 경자년이 된다. 그러면 앞으로 다가올 연도 중에서 2000년 이후로 가장 가까운 무신년은 몇 년도인가?

풀이 답: 2028

1592년은 임진년이며, 1601년은 신축년, 1602년은 임인년이 된다.
이렇게 10년이 지나면 10간에서 따는 첫 글자는 똑같고, 12지에서 따는 두 번째 글자는 두 글자 앞으로 오게 된다. 이렇게 하면 1612년은 임자년, 1622년은 임술년, 1632년은 임신년, 1642년은 임오년, 1652년은 임진년이 되고, 십간의 10과 십이지의 12의 최소공배수가 되는 60년마다 같은 이름을 붙여서 부르게 된다.
1598년이 무술년이라고 했으므로 1608년은 무신년이 된다. 따라서 무신년은 1608년에서 60을 계속 더해나간 해이므로 $1608+60x$ 에서 $x=7$ 이면 $1608+60\times7=2028$ 년이 무신년이다.

유제 7

흔히 우리나라에서 연도를 말할 때 십간십이지(十干十二支)를 사용하는데, 십간(十干)과 십이지(十二支)는 아래와 같다.

십간(十干): 갑(甲) 을(乙) 병(丙) 정(丁) 무(戊) 기(己) 경(庚) 신(辛) 임(壬) 계(癸)

십이지(十二支): 자(子) 축(丑) 인(寅) 묘(卯) 진(辰) 사(巳) 오(午) 미(未) 신(申) 유(酉) 술(戌) 해(亥)

십간과 십이지의 글자들을 매년 차례대로 짝지어 한 해를 지칭하는데 십간은 10년에 1번, 그리고 십이지는 12년에 1번 되돌아온다. 2006년은 병술년(丙戌年)이고, 2013년은 계사년(癸巳年)이다. 다가올 가장 빠른 임오년(壬午年)은 몇 년도인지 구하여라.

8 탐구예제

원리탐구

50개의 서랍에 1에서 50까지 번호가 붙어 있다. 50명의 학생이 첫 번째 학생은 서랍을 모두 열고, 두 번째 학생은 2의 배수의 서랍을 닫고, 세 번째 학생은 3의 배수인 번호의 서랍 중 열린 것은 닫고 닫힌 것은 열었으며, 네 번째 학생은 4의 배수인 번호의 서랍 중 열린 것은 닫고 닫힌 것은 열었다. 이와 같이 50번째 학생이 모두 서랍을 여닫기를 하였다. 다음 물음을 구하여라.

(1) 두 번만 여닫기가 된 서랍 수 (2) 5번째 학생이 닫은 서랍 수

(3) 50개의 서랍 중 마지막에 열려있는 것의 수

풀이 답: (1) 15(개) (2) 5, 20, 25, 30, 35, 40 (3) 7개

서랍의 입장에서 보면 약수의 번째에 해당하는 학생이 여닫기를 하므로 약수에 관한 문제이다.
(1) 두 번만 여닫기가 되었다는 것은 소수의 개수를 구하라는 뜻과 같다. 소수의 구별은 제곱수 이용법으로 구하면 24이하는 2, 3으로 48이하는 2, 3, 5로 나누어지지 않으면 소수이다.
따라서 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 ⇒ 15(개)이다.
(2) 5의 배수 중 5보다 작은 약수가 홀수 개 있어야 한다.
5, 20, 25, 30, 35, 40 은 닫게 된다.
(3) 열려 있으려면 약수가 홀수 개 있어야 하는데 그 수는 완전제곱수이다. $1^2\sim7^2$까지 7개이다.

유제 8

위 문제 (탐구예제8)에서 다음을 구하여라.
(1) 4번 만 여닫기가 된 서랍 수 (2) 9번째 학생이 닫은 서랍 수

종합문제 B

1. 크기가 같은 빵 7개를 12명의 학생이 공평하게 나누어 먹으려고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) $\frac{7}{12}$을 3개의 단위분수의 합으로 나타내어라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 빵 7개를 12등분하는 방법을 설명하여라.

2. 전쟁에서 병사 수를 빨리 세기 위하여 수돌이는 다음과 같이 명령하였다. 아래의 사실로 보아 병사 수는 몇 명인가?(단, 병사 수는 300명에서 400명 사이이다.)

(ⅰ) 5명씩 짝을 지어보아라. 짝을 짓지 못한 사람은 몇 명인가? 짝을 짓지 못한 사람이 1명입니다. (ⅱ) 7명씩 짝을 지어보아라. 짝을 짓지 못한 사람은 몇 명인가? 짝을 짓지 못한 사람이 3명입니다. (ⅲ) 11명씩 짝을 지어보아라. 짝을 짓지 못한 사람은 몇 명인가? 짝을 짓지 못한 사람이 3명입니다.

3. 범인이 남기고간 숫자가 지워진 영수증의 금액은 $\boxed{\ }673\boxed{\ }$ 이고 이것은 같은 물건 72개를 구입한 금액이다. 범인으로 의심이 가는 사람과 영수증 금액은 보기와 같을 때, 범인은 누구인가?

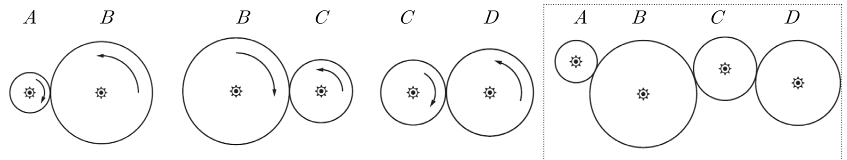
|보기|
(1) 신문 배달원 페일러: 총 26,736원 (2) 경비원 브루스: 총 96,732원 (3) 무역회사직원 송: 총 56,736원

4. 수돌이 팀 11명이 수학 퀴즈대회에서 우승하였다. 도우미들이 $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 이 적혀있는 판자 일곱 개를 무대 위로 가지고 올라와서 승리한 팀에게 주었다. 사회자는 또 하나의 커다란 판자를 가지고 수돌이에게 말했다.

"이제 1분 동안 생각할 시간을 드릴 테니 판자를 마음대로 움직여 여러 자리 수가 되도록 이 판자에 나란히 맞추어 붙이십시오. 그 숫자가 바로 여러분이 받으실 상금입니다." "단, 한 가지 조건이 있습니다. 승리한 팀의 인원이 모두 11명이죠? 그래서 이 숫자는 11로 나누어 나머지가 없어야 합니다. 그래야 상금을 나눠 가질 때 마찰이 없겠죠?" 수돌이 팀 11명의 최대상금을 구하여라.(만약 숫자판을 돌려놓을 수 있다면?)

5. 1 분단 학생 9 명에게 1 부터 9 까지 번호를 주고, 2 분단 학생 11 명에게 10 부터 20 까지 번호를 준다. 매일 5 명의 학생을 번호 순서대로 순환하여 당번으로 정하되 1 분단은 2 명씩 돌아가며 당번을 하고, 2 분단은 3 명씩 돌아가며 당번을 한다. 첫째 날의 당번이 1, 2, 10, 11, 12 번이었다면 다음으로 1, 2, 10, 11, 12 번의 학생이 같이 당번이 되려면 최소 며칠이 더 있어야 하는가?

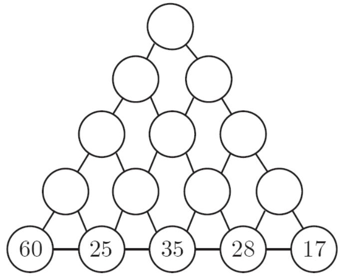
6. 다음과 같이 바퀴들이 서로 접하여 돌아간다. [그림1]에서 A 바퀴를 회전축을 중심으로 시계 방향으로 5 바퀴 돌리면 B 바퀴는 회전축을 중심으로 반시계 방향으로 2 바퀴 돌아간다. [그림2]에서 B 바퀴를 회전축을 중심으로 3 바퀴 시계 방향으로 돌리면 C 바퀴는 회전축을 중심으로 반시계 방향으로 7 바퀴 돌아간다. [그림3]에서 C 바퀴는 회전축을 중심으로 4 바퀴 시계 방향으로 돌리면 D 바퀴는 회전축을 중심으로 반시계 방향으로 3 바퀴 돌아간다. [그림4]와 같이 A, B, C, D 바퀴들을 서로 밀착시켜 놓고서 D 바퀴를 회전축을 중심으로 70 바퀴 반시계 방향으로 돌리려한다면 A 바퀴를 회전축을 중심으로 어느 방향으로 몇 바퀴 돌려야 할까? (특 260)



[그림1] [그림2] [그림3] [그림4]

[사고력 퀴즈와 퍼즐]

1. 5 개의 수 60, 25, 35, 28, 17 이 있다. 위 칸에는 바로 아래의 두 수의 곱을 써 넣는다. 제일 위 칸에 들어갈 수의 끝자리에 연속되는 0 의 개수는 몇 개인가?



2. 1에서 9까지 한자리 수를 이용하여 같은 숫자를 다섯 번 사용하고, 모든 수학 기호를 사용하여 100 을 만드는 방법을 될 수 있는 한 많이 만들어라.(예, $33\times 3+\frac{3}{3}=100$)

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

[일반 수리창의력]

1. 소수년 주기로 출현하는 매미가 유리한 점

매미의 주기가 15년과 18년이라면 두 매미가 동시에 출현하는 시기는 15와 18의 최소공배수인 90년에 한 번씩 돌아온다. 그런데 소수 주기를 갖는 13년 매미와 17년 매미의 경우 두 매미가 동시에 활동하는 시기는 13과 17의 공배수인 221년마다 한 번씩 돌아온다. 즉 매미의 주기가 줄었는데도 만나는 시간 간격은 더 길어지게 된다.
이와 같이 매미가 소수년은 주기로 출현하는 매미가 합성수년을 주기로 출현하는 매미보다 유리한 점을 두 가지 써라.
(1)

(2)

2. 친화수

친화수(amicable number)에 대하여 다음 물음에 답하여라.
(1) 친화수의 정의(뜻)

(2) 220의 진약수(자기 자신을 제외한 약수)의 합을 구하는 방식을 통하여 친화 수를 구하여라.

[읽을거리]

1. 매미가 태어나는 주기가 소수 년인 이유

이에 대한 해석 중의 하나는 매미가 천적을 피하기 위해 주기가 소수가 되도록 적응해왔다는 설이다. 매미의 주기가 소수라면 성충이 되어 땅 위로 나왔을 때 천적과 만날 가능성을 줄일 수 있기 때문이다.
예를 들어 매미의 주기가 6년이고 천적의 주기가 2년 또는 3년이라면 매미와 천적은 6년마다 만나고, 주기가 4년인 천적과는 12년마다 만난다. 그렇지만 매미의 주기가 5년이면 주기가 2년인 천적과는 10년마다, 주기가 3년인 천적과는 15년마다, 또 4년인 천적과는 20년마다 만난다. 즉 주기가 6년에서 5년으로 줄어들면 도리어 천적과 만나는 간격은 길어진다. 5는 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 소수이기 때문이다.

매미의 주기	천적의 주기	매미와 천적이 만나는 주기
6년	2년	6년
	3년	6년
	4년	12년
5년	2년	10년
	3년	15년
	4년	20년

매미의 소수 주기를 먹이 경쟁의 관점에서 설명할 수도 있다. 여러 종의 매미들이 동시에 출현하게 되면 먹이를 둘러싼 경쟁이 치열해지므로, 가능하면 주기가 겹치지 않도록 하는 것이 유리하다. 예를 들어 매미의 주기가 15년과 18년이라면 두 매미가 동시에 출현하는 시기는 15와 18의 최소공배수인 90년에 한 번씩 돌아온다. 그런데 소수 주기를 갖는 13년 매미와 17년 매미의 경우 두 매미가 동시에 활동하는 시기는 13과 17의 공배수인 221년마다 한 번씩 돌아온다. 즉 매미의 주기가 줄었는데도 만나는 시간 간격은 더 길어지게 된다. 두 소수의 최소공배수는 두 수의 곱이 되기 때문에 상대적으로 큰 수가 되며, 그만큼 매미는 치열한 먹이 경쟁을 피해갈 수 있다.
원래 매미의 주기는 소수인 경우도 있고 합성수인 경우도 있었을 것이다. 그렇지만 오랜 시간에 걸쳐 진화해오면서 합성수 주기 매미들은 천적에 잡아먹히거나 극심한 먹이 경쟁으로 인해 도태되고, 상대적으로 유리한 조건에 있는 소수 주기 매미들이 남게 된 것이다. 삼라만상이 다 나름의 생존전략을 가지고 있을진대 매미 역시 예외는 아닌 것 같다.

2. 친화 수

진약수의 합이 서로 엇갈리면서 같아지는 한 쌍의 수를 '친화수(amicable number)'라고 한다. 대표적인 친화수의 예는 220과 284로, 220에서 자기 자신을 제외한 약수를 모두 더하면 284가 되고, 역으로 284에서 자기 자신을 제외한 약수를 모두 더하면 220이 된다.

〈성경〉의 〈창세기〉 32장에는 야곱이 형 에서를 위해 염소와 양을 보냈는데 그 수가 각각 220마리라고 적혀 있다. 또한 성경의 〈느헤미야〉 11장에는 "거룩한 성에 레위 사람의 도합이 284명이었느니라" 라는 내용이 있다. 여기서 220과 284는 우연히 아니라 의도적인 선택일 가능성이 높다.

$1+2+4+71+142=220$

(284의 자기 자신을 제외한 약수들의 합)

$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$

(220의 자기 자신을 제외한 약수들의 합)

친화수가 되는 수를 조사해보면 $(1184, 1210)$, $(2620, 2924)$, $(12285, 14595)$와 같이 짝수끼리 혹은 홀수끼리의 쌍이 된다. 피타고라스학파는 짝수가 여성, 홀수가 남성을 나타낸다고 보았기 때문에 친화수는 동성인 수가 되며, 우정을 상징하는 수로 알려져 있다. 그런 의미에서 친화수는 '친구수' 혹은 '우애수'라 불리기도 한다.

[출전: 박경미 지음, 수학비타민, 김영사]