100문제를 푸는 것보다 100문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

수학 올림피아드 600제 (하)

수학 올림피아드 주관식 단답형 대비서
(중등 KMO1차·민사고·수학경시 대비)

Mathematics
the Discovery of Dharma 600 problems

조합 · 해석론 편

저자 최경호

원리탐구

제 1강 경우의 수(1)

탐구예제 >>

1 탐구예제 (301)

원리탐구

a, a, b, b, c, c의 6개의 문자를 같은 문자끼리는 이웃하지 않도록 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하여라.

풀이 **답:** 30

포함과 배제의 원리를 적용하면

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

전체 가지 수는 $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$

a가 이웃하는 가지 수는 $\dfrac{5!}{2! \cdot 2!}$ $(\times 3)$

a와 b가 동시에 이웃하는 가지 수는 $\dfrac{4!}{2!}$ $(\times 3)$

a, b, c가 동시에 이웃하는 가지 수는 $3!$

$$\therefore \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} - \left(\frac{5!}{2! \cdot 2!} \times 3\right) + \left(\frac{4!}{2!} \times 3\right) - 3! = 30$$

탐구유제 1 (302)

검은 공 6 개, 흰 공 2 개, 빨간 공 1 개가 있다. 다음을 구하여라.
(단, 같은 색의 공은 구별되지 않는다.)

(1) 9 개의 공을 일렬로 배열하는 경우의 수

(2) 9 개의 공 모두를 원형으로 배열하는 경우의 수

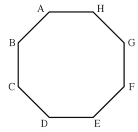
(3) 9 개의 공으로 만든 목걸이(염주순열)의 수

2 탐구예제 (303)

원리탐구

경태가 정팔각형의 변을 따라 움직이는 로봇을 만들었다. 이 로봇은 정팔각형의 한 변을 지나가는 데 1 분이 걸리며, 각 꼭지점에서는 가던 방향으로 계속 가거나 반대 방향으로 바꿀 수 있다고 한다. 이 로봇이 한 꼭지점 A 에서 출발하여 8 분 동안 계속 움직여 꼭지점 A 의 반대편 꼭지점에 도달할 수 있는 경우의 수를 구하여라.

풀이 **답:** 56 가지



앞으로 가는 것을 ○라 하고 뒤로 가는 것을 ×라 하면
○는 6개 ×는 2개가 되면 E 에 도착한다.
∴ ○○○○○○×× 를 나열하는 방법 수이므로 $\dfrac{8!}{6!\cdot 2!}$ 이며,
A 에서 B 로 먼저 출발하는 것과 H 로 출발하는 2 가지 경우가
있으므로 $\dfrac{8!}{6!\cdot 2!}\times 2=56$ 가지

탐구유제 2 (304)

정육면체의 6 개의 면에 5 가지 색을 모두 사용하여 칠하는 데 한 면에 한 가지 색을 칠하고, 또 어느 한 색은 평행한 두 면에 칠할 때, 정육면체를 칠하는 방법의 수를 구하여라.

3 탐구예제 (305)

원리탐구

x_i (단, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$)는 각각 $-1, 1, 2$ 중 어느 한 값을 택한다.
방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_8=9$ 을 만족하는 근의 개수를 구하여라.

풀이 **답:** 456

$-1, 1, 2$ 를 택하는 가지 수를 각각
a, b, c (단, a, b, c 는 음이 아닌 정수)가지라 하면
$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_8=9$ 이므로
$-a+b+2c=9$ …… ① , $a+b+c=8$ …… ②
i) $c=1$ 일 때, $-a+b=7$ 이므로 $a=0, b=7$
ii) $c=3$ 일 때, $-a+b=3$ 이므로 $a=1, b=4$
iii) $c=5$ 일 때, $-a+b=-1$ 이므로 $a=2, b=1$
따라서 ①, ②를 만족하는 순서쌍 $(a, b, c)=(0, 7, 1), (1, 4, 3), (2, 1, 5)$ 이다.
∴ $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2), (-1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2), (-1, -1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$ 를
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ 를 일대일 대응시키면 된다.
∴ $\dfrac{8!}{7!}+\dfrac{8!}{4!\cdot 3!}+\dfrac{8!}{2!\cdot 5!}=456$

탐구유제 3 (306)

다음 물음에 답하여라.

자연수 n 에 대하여 함수 $f(n)$ 을 $f(n)=$(n의 각 자리수의 곱)으로 정의하기로 했다.

예를 들면 $f(47)=4\times7=28$ 이다. 이 때, 일의 자리가 0 이 아닌 두 자리 자연수 a , b , c 에 대하여 $f(a)+f(b)+f(c)=6$ 을 만족하는 자연수 a , b , c 의 곱 abc 는 몇 가지인지 구하시오.

4 탐구예제 (307)

사이렌을 울려서 신호를 만들려고 한다. 울리는 시간을 1초와 2초의 한 쪽 또는 양쪽을 쓰고, 중간에 쉬는 시간은 1초씩으로 한다. 한 신호에 필요한 시간을 15초로 할 때, 몇 가지 신호가 만들어지는지 구하여라.

풀이 **답:** 37 가지

사이렌을 1 초, 2 초씩 울리는 것을 각각 a, b 라고 하자.

a 를 x 번, b 를 y 번 사용하면 쉬는 것은 $(x+y-1)$ 번이므로

한 신호에 필요한 시간은 $x+2y+(x+y-1)=15$ (초)

$\therefore\ 2x+3y=16$ **(단, x, y 는 음이 아닌 정수)**

$\therefore\ (x,\ y)=(8,\ 0),\ (5,\ 2),\ (2,\ 4)$

ⅰ) $x=8,\ y=0$ **:** a **문자 8 개를 일렬로 배열하는 방법은 1 가지**

ⅱ) $x=5,\ y=2$ **:** a **문자 5 개,** b **문자 2 개를 배열하는 방법은** $\dfrac{7!}{5!\cdot2!}=21$ **(가지)**

ⅲ) $x=2,\ y=4$ **:** a **문자 2 개,** b **문자 4 개를 배열하는 방법은** $\dfrac{6!}{2!\cdot4!}=15$ **가지**

$\therefore\ 1+21+15=37$ **(가지)**

탐구유제 4 (308)

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 함수 $f:X\to Y$가 있다.

이 때, $f(1)+f(2)+f(3)=7$ 을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하여라.

5 탐구예제 (309)

남자 5명, 여자 10명을 일렬로 세울 때, 남자끼리는 어느 두 명도 서로 이웃하지 않게 세우는 방법의 수를 구하여라.

풀이 **답:** $10!\times{}_{11}P_5$

아래 그림에서

검은 곳은 여자 10 명이 앉을 자리, 흰 곳은 비어 있는 자리라 하면

○●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○

여자 10 명을 일렬로 세우는 방법의 수 : $10!$

여자 사이사이와 양 끝의 비어 있는 11 곳 중에서 5 곳에 남자를 세우는 방법의 수 : ${}_{11}P_5$

$\therefore$ **구하는 방법의 수는 $10!\times{}_{11}P_5$ 이다.**

탐구유제 5 (310)

5 개의 '+' 부호와 8 개의 '-' 부호를 일렬로 배열하여 부호의 변화가 5 회가 되도록 하는 것은 몇 가지인지 구하시오.

탐구종합 >>>

탐구종합 1 (311)

원탁에 둘러 앉아있는 12 명 중에서 4 명의 위원을 뽑으려고 한다. 인접하여 앉아 있는 사람은 함께 선출될 수는 없다고 할 때, 위원을 뽑는 방법의 수를 구하여라.

탐구종합 2 (312)

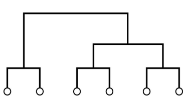
8 명이 타고 있는 승강기가 2 층으로부터 11 층까지 10 개 층에서 설 수 있다고 한다. 이 때, 각각 4 명, 2 명, 2 명씩 3 개 층에서 모두 내리게 되는 방법의 수를 구하여라.

탐구종합 3 (313)

각 자리의 수의 합이 3 인 자연수를 작은 수부터 차례대로 나열하여 만든 수열을 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 이라 할 때, a_{21} 의 값을 구하여라.

탐구종합 4 (314)

여섯 개의 축구팀이 그림과 같이 토너먼트로 시합을 가질 때, 대진표를 작성하는 방법의 수를 구하여라.



탐구종합 5 (315)

여러 사람이 모인 자리에서 서로 아는 사람끼리만 한 번씩 악수를 하였다고 하자. 각 사람마다 악수한 횟수가 모두 같고 전체 악수의 횟수가 2005 번일 때, 모인 사람의 수가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

탐구종합 6 (316)

12 개의 의자가 일렬로 놓여 있다. 이 의자에 4 명이 앉을 때, 어느 두 사람도 인접 하지 않는 경우의 수를 구하여라.

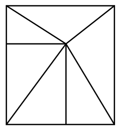
탐구종합 7 (317)

(1) 10000 을 연속되는 두 개 이상의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 경우의 수는 모두 몇 개 인지 구하시오.(단, 더하는 순서는 무시한다.)

(2) 7 을 두 개 이상의 자연수의 합으로 표현하는 방법의 수는 몇 개인가인지 구하시오. 단, 더하는 순서가 다르면 다른 표현으로 본다. 예를 들어 2+2+3, 2+3+2, 3+2+2 는 모두 다른 것으로 본다.

탐구종합 8 (318)

직사각형을 그림과 같이 6 개의 삼각형으로 나누고 빨강, 노랑, 파랑의 3 가지색을 써서 이들 6 개의 삼각형을 구분하려고 한다. 여기서 이웃한 삼각형은 서로 다른 색을 칠하고 사용하지 않은 색은 없다고 할 때 그 방법의 수를 구하여라.



도전예제 >>>

1 도전예제 (319)

원리탐구

어떤 분수를 분자가 1 이고 분모가 자연수인 두 분수의 합으로 나타내는 방법에는 여러 가지가 있다. 예를 들면, $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ 과 같이 각각 두 가지, 세 가지 방법으로 나타낼 수 있다.

이 때, $\frac{1}{2^{10}}$ 을 위와 같이 나타낼 수 있는 방법의 수를 구하여라.

풀이 **답:** 11

$\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (a, b 는 자연수)로 놓고 양변에 $2^{10}ab$ 을 곱하면

$ab=2^{10}a+2^{10}b$, $(a-2^{10})(b-2^{10})=2^{20}$ 그런데 $a \leq b$ 라 하면

$a-2^{10}$	1	2	2^2	2^3	……	2^{10}
$b-2^{10}$	2^{20}	2^{19}	2^{18}	2^{17}	……	2^{10}

이 되어 순서쌍 (a,b) 는

$(2^{10}+1,\ 2^{10}+2^{10+10})$,$(2^{10}+2,\ 2^{10}+2^{19})$, …… ,$(2^{10}+2^{10},\ 2^{10}+2^{10})$

따라서 모두 11 가지 방법으로 나타낼 수 있다.

2 도전예제 (320)

원리탐구

일렬로 배열된 20 개의 의자에 8 개의 구별되지 않는 공을 얹어 놓으려고 한다. 이웃하는 공 사이에 홀수 개의 빈 의자가 있도록 얹어 놓는 방법의 수를 구하여라.

풀이 **답:** 90 가지

■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □

20개의 의자에 번갈아 흑백을 칠하자.

그럼 공은 모두 같은 색의 의자에 놓여야 한다.
또한, 검은 의자에 놓이는 경우와 흰 의자에 놓이는 경우는 대칭적이므로 경우의 수가 같다.
검은 의자에 놓이는 경우만 세어보면,
10 개의 의자 중에서 8 개를 고르는 것이므로 ${}_{8}C_{10}=45$
따라서 모든 방법의 수는 $2 \cdot 45=90$ 가지이다.

3 도전예제 (321)

원리탐구

1 을 시작으로 하여 자연수의 순서에 따라 다음과 같이 2222 개의 수를 연이어 썼을 때, 0 은 모두 몇 개 사용하였는지 구하시오.

123456789101112…… 22212222

풀이 **답:** 642 개

0 이 위치한 자리 수에 따라 분류한다.

i) 일의 자리에 있는 0 의 개수
맨 앞의 아홉 개의 수 즉, 1, 2, 3, ... , 9 에는 일의 자리에 0 이 없으므로
$2222-9=2213$ 개의 수를 살펴보면 10 부터 시작하여 10 개의 수를 사이에 두고
일의 자리에 0 이 하나씩 있다.
$2213=221\times10+3$ 이므로 일의자리에 있는 0의 개수는 222 개

ii) 십의 자리에 있는 0 의 개수
맨 앞의 99 개의 수 즉, 1, 2, 3, ... , 99 에는 십의 자리에 0 이 없으므로
$2222-99=2123$ 개의 수를 살펴보면 100 부터 시작하여 100 개의 수
(예를 들면 100, 101, 102, ... , 199중에 십의자리의 0)의 십의 자리에 0 이 10 개 있다.
$2123=21\times100+23$ 이므로 십의자리에 있는 0 의 개수는 220 개

iii) 백의 자리에 있는 0 의 개수
맨 앞의 999 개의 수 즉, 1, 2, 3, ... , 999 에는 백의 자리에 0 이 없으므로
$2222-999=1223$ 개의 수를 살펴보면 매 1000 개의 수의 백의 자리에 0 이 100 개 있다.
$1223=1000\times1+223$ 이므로 백의자리에 있는 0 의 개수는 200 개

∴ i), ii), iii)에서 구하려는 0 의 개수는 642 개

도전종합 >>>

도전종합 1 (322)

다음 물음에 답하여라.

(1) ${}_{1995}C_{20}+{}_{1994}C_{19}+{}_{1993}C_{18}+{}_{1992}C_{17}+{}_{1991}C_{16}+{}_{1991}C_{15}$ 의 값을 간단히 하여라.

(2) $a_n={}_nC_0-\frac{1}{2}{}_nC_1+\frac{1}{2^2}{}_nC_2-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^n}{}_nC_n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{8}a_n$ 의 값을 구하여라.

(3) ${}_{100}C_{36}=\frac{100!}{64!\cdot 36!}=2^n(2k+1)$ (n, k 는 음이 아닌 정수)을 만족하는 n 의 값을 구하여라.

도전종합 2 (323)

방학을 이용하여 철수는 할아버지, 작은아버지, 고모, 이모, 외삼촌 집을 방문하기로 하였다. 이 때, 할아버지 집은 2 번, 나머지 집은 1 번만 방문하고 돌아온다고 할 때, 몇 가지의 방문 방법이 있는지 구하시오.(단, 할아버지 집을 연속해서 두 번 방문하지 않는다.)

도전종합 3 (324)

1 에서 9999 까지의 정수 중에서 0 을 한 개 포함하는 것, 두 개 포함하는 것, 한 개도 포함하지 않는 것의 개수를 각각 구하여라.

도전종합 4 (325)

n 이 홀수일 때, 정 n 각형의 꼭지점을 이어서 만들 수 있는 사다리꼴의 총 개수를 구하여라. (단, $n\geq 5$)