100문제를 푸는 것보다 문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

수학 올림피아드 주관식 단답형 대비서
(중등 KMO1차·민사고·수학경시 대비)

수학 올림피아드 600제 (상)

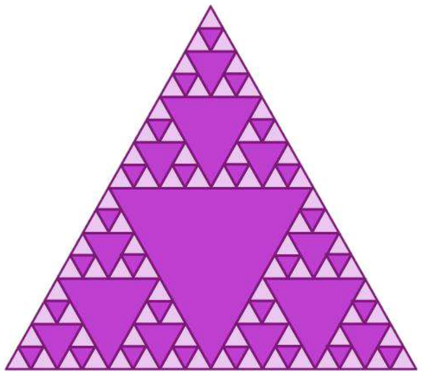
Mathematics
the Discovery of Dharma 600 problems

정수론 · 기하학 편

저자 최경호

원리탐구

제 1강 삼각형과 오심



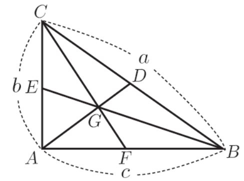
탐구예제 >>

1 탐구예제 (151) 원리탐구

G는 $\triangle ABC$의 무게중심 $\angle A=90^\circ$이고, $\overline{GB}=10$, $\overline{GC}=8$일 때, $\overline{AG}$의 길이를 구하여라.

풀이 답: $\dfrac{2\sqrt{205}}{5}$

$\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ 라고하자. 무게중심은 꼭지점에서 변까지의 길이가 $2:1$이고, 피타고라스의 정리에 의해 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.



$15^2=\left(\frac{1}{2}b\right)^2+c^2 \quad \cdots ①, \quad 12^2=b^2+\left(\frac{1}{2}c\right)^2 \cdots ②$

$① + ②, \; 225+144=\frac{5}{4}(b^2+c^2)=\frac{5}{4}a^2, \; a^2=\frac{4}{5}\times 369$

$\angle A=90^\circ$, 점D가 $\overline{BC}$의 중점,

$\overline{CD}=\overline{DB}=\overline{AD}$, $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{3}a$ 이므로 다음과 같다.

$\overline{AG}^2=\left(\frac{1}{3}a\right)^2=\frac{1}{9}a^2$ 이므로 $\overline{AG}^2=\frac{1}{9}\times\frac{4}{5}\times 369=\frac{164}{5}$, $\overline{AG}=\sqrt{\frac{164}{5}}=\frac{2\sqrt{205}}{5}$ 이다.

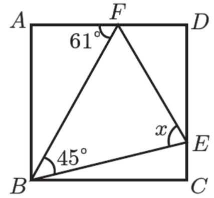
탐구유제 1 (152)

원래의 삼각형의 면적이 80일 때, 이 삼각형의 세 중선이 변이 되어 만들어지는 삼각형의 면적을 구하여라.

2 탐구예제 (153)

원리탐구

다음 그림에서 점 E와 점 F는 각각 정사각형 A, B, C, D의 $\overline{CD}$ 와 $\overline{AD}$ 위의 점이다. 각 x의 크기를 구하여라.

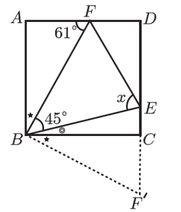


풀이 **답:** 74°

$\triangle ABF$를 점 B중심으로 90° 회전하여 $\overline{AB}$ 가 $\overline{BC}$ 와 맞닿도록 옮기면, $\triangle BEF$와 $\triangle BEF'$ 에서 $\star + ◎ = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ 이므로 $\angle EBF' = 45^\circ$ 이다.

$\overline{BF} = \overline{BF'}$, $\angle FBE = \angle EBF' = 45^\circ$, $\overline{BE}$ 는 공통이므로 $\triangle BEF$와 $\triangle BEF'$ 은 합동이다.

따라서 $\angle x = \angle CEB = 180^\circ - (45^\circ + 61^\circ) = 74^\circ$ 이다.



탐구유제 2 (154)

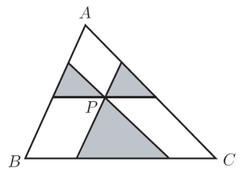
한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$에서 P, Q는 $\overline{AB}, \overline{AD}$ 위의 점이고, $\triangle APQ$의 둘레의 길이가 2일 때, $\angle PCQ$의 크기를 구하라.

3 탐구예제 (155)

원리탐구

P는 $\triangle ABC$의 내부의 한 점이다. 점 P를 지나며 $\triangle ABC$의 각 변에 평행한 선을 그었을 때, $\triangle ABC$의 변과 그 세 직선으로 둘러싸인 3개의 삼각형의 넓이는 각각 $4,\ 9,\ 49$이다. 이때 $\triangle ABC$의 넓이를 구하여라.

풀이 답: 144 에이미 2회3번

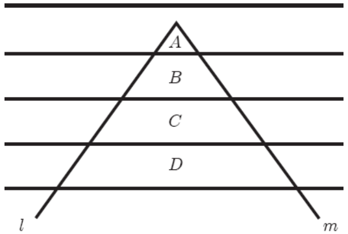


주어진 그림의 어두운 부분의 3개의 삼각형은 모두 $\triangle ABC$와 닮은 도형이다. 그러므로 세 삼각형의 넓이의 비를 고려하여 닮음비를 생각하면 $\overline{BC}$는 두 개의 점에 의하여 $3:7:2$로 나뉜다. 그러므로 가장 큰 어두운 삼각형과 $\triangle ABC$의 닮음비는 $7:12$이고, 넓이의 비는 닮은비의 제곱비이다. 따라서 $\triangle ABC$의 넓이를 x라 하면,

$49 : x = 7^2 : 12^2,\ x = 144$이다.

탐구유제 3 (156)

다음 그림에서 수평선 5개는 일정한 간격으로 떨어진 평행선들이다. 직선 l과 m으로 둘러싸인 영역의 넓이를 위에서부터 A, B, C, D라 하고, $B:C=1:2$일 때, $\frac{D}{A}$의 값을 구하여라. (와이즈230)

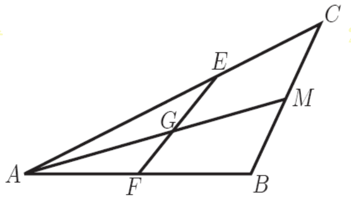


4 탐구예제 (157)

원리탐구

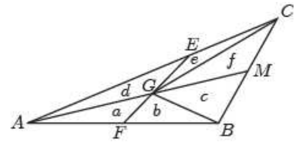
그림과 같이 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=12$, $\overline{AC}=15$, 점 M은 $\overline{BC}$의 중점이고, 점 E와 F는 $\overline{AE}=2\overline{AF}$인 $\overline{AC}$와 $\overline{AB}$ 위의 점이다. $\overline{EF}$와 $\overline{AM}$의 교점을 G라 할 때, $\overline{EG}:\overline{FG}$를 구하여라.

(성대 중 2, 11회)



풀이 답: $8:5$

그림과 같이 $\overline{GB}$, $\overline{GC}$를 연결하면 $\triangle ABC$는 6개의 작은 삼각형으로 나누어진다. 이 6개의 작은 삼각형의 넓이를 각각 a, b, c, d, e, f라 놓고 $\overline{AF}=x$라 하면



$\triangle ACM=\triangle ABM$이므로 $d+e+f=a+b+c$,

$f=c$이므로 $a+b=d+e$이다.

$\overline{AF}=x$이므로 $\overline{AE}=2x$, $\overline{FB}=12-x$, $\overline{EC}=15-2x$이다.

$\frac{b}{a}=\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}=\frac{12-x}{x}$, $\frac{e}{d}=\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=\frac{15-2x}{2x}$

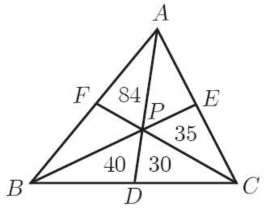
따라서 $a+b=a+\frac{12-x}{x}\times a=a\times\frac{12}{x}$, $d+e=d+\frac{15-2x}{2x}\times d=d\times\frac{15}{2x}$

$a+b=d+e$이므로 $a\times\frac{12}{x}=d\times\frac{15}{2x}$이고 $8a=5d$이므로 $d:a=8:5$이다.

탐구유제 4 (158)

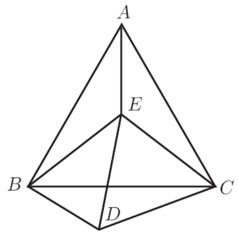
그림과 같이 점 P가 $\triangle ABC$의 내부의 한 점이고 $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}$의 연장선이 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$와 각각 D, E, F에서 만난다.

$\triangle PAF = 84, \triangle PCE = 35, \triangle PBD = 40, \triangle PDC = 30$ **일 때, $\triangle ABC$의 넓이를 구하여라.**



5 탐구예제 (159)

그림과 같이 정삼각형 ABC와 CDE가 있다. $\angle EBD = 62^\circ$일 때, $\angle AEB$의 크기를 구하여라.



풀이 **답:** 122°

$\triangle ABC$와 $\triangle CDE$가 정삼각형이므로 $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{EC} = \overline{DC}$이고

$\angle ACE = 60^\circ - \angle BCE = \angle BCD \quad \therefore \triangle AEC \equiv \triangle BDC$

즉 $\triangle BDC$를 점 C를 중심으로 60°만큼 회전 변환한 것이 $\triangle AEC$이다. $\therefore \angle AEC = \angle BDC$

$\angle AEB = 360^\circ - (\angle AEC + \angle BEC) = 360^\circ - (\angle BDC + \angle BEC)$, $\quad \angle EBD = 62^\circ, \angle ECD = 60^\circ$

이므로 $\angle BDC + \angle BEC = 360^\circ - (62^\circ + 60^\circ) = 238^\circ$,

$\angle AEB = 360^\circ - (\angle BDC + \angle BEC) = 360^\circ - 238^\circ = 122^\circ$ 이다.

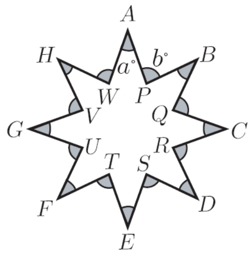
탐구유제 5 (160)

볼록오각형 $ABCDE$ 에서 $\overline{BE}$ 와 $\overline{BC}$ 가 각각 $\overline{CD}$ 와 $\overline{AD}$ 에 평행하고 $\overline{BC}=\overline{ED}$, $\overline{AB}=\overline{CD}$ 이다. $\angle BCD=130^\circ$ 이고 $\angle ACE=x^\circ$ 일 때, x를 구하여라.(KMO 23회)

탐구종합 >>>

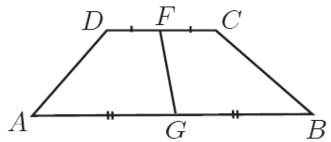
탐구종합 1 (161)

그림과 같이 길이가 같은 16개의 변으로 이루어진 오목다각형에서 $\angle A=\angle B=\angle C=\cdots=\angle H=a^\circ$, $\angle P=\angle Q=\angle R=\cdots=\angle W=b^\circ$ 일 때, $b-a$ 의 값을 구하여라.



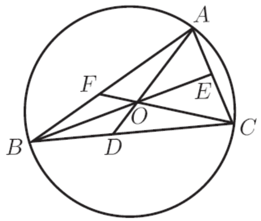
탐구종합 2 (162)

그림과 같이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 는 사다리꼴 $ABCD$ 의 밑변이고 $\overline{AB}>\overline{CD}$ 이다. $\angle A+\angle B=90^\circ$ 이고 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 의 중점을 각각 G, F 라 하고 $\overline{AB}=20$, $\overline{CD}=8$ 일 때, $\overline{FG}$ 의 길이를 구하여라.



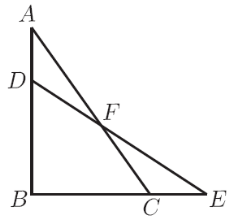
탐구종합 3 (163)

그림과 같이, 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이고, $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$를 연결하고 아울러 연장하여 각각 대변$\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$을 D, E, F에서 만나며 R은 외접원의 반지름이다. $R=10$일 때, $R\left(\frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{BE}}+\frac{1}{\overline{CF}}\right)$의 값을 구하여라.



탐구종합 4 (164)

그림의 $\triangle ABC$는 $\angle B=\angle R$, $\overline{AB}=2a$, $\overline{BC}=a$인 직각 삼각형이다. $\overline{AD}=\overline{CE}=4$ 가 되도록 D와 E를 잡고 $\overline{DE}$와 $\overline{AC}$의 교점을 F라 한다. 이때, $\triangle ADF$의 넓이가 $\triangle FCE$의 넓이보다 크게 되는 a의 범위를 구하여라. 민사고 1998



탐구종합 5 (165)

$\overline{AB}=20$, $\overline{BC}=25$, $\overline{CA}=15$인 직각삼각형 ABC에서 변 AB의 중점이 M, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발이 H이다. 변 AC 위의 점 P에 대하여 $\angle AHM=\angle AHP$ 일 때, $5\overline{AP}$의 값을 구하여라.(KMO 20회)

탐구종합 6 (166)

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=15$, $\overline{BC}=20$, $\overline{AC}=25$이고, 점 A와 변 BC의 중점 D를 연결한 직선을 l, 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 E, $\overline{BE}$와 직선 l이 만나는 점을 F라 하자. $51\overline{EF}$의 값을 구하여라.(KMO 21회)

탐구종합 7 (167)

넓이가 48 인 정삼각형 ABC에서 $\overline{AC}$의 중점을 D라 하고 수심을 H 라 하자. 선분 AD 위의 점 P를 $\angle DPH=60^\circ$ 가 되도록 잡고, $\triangle APH$의 외접원이 변 AB와 만나는 점을 $Q(Q\neq A)$, $\triangle BQH$의 외접원이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 $R(R\neq B)$ 라고 할 때, $\triangle PQR$의 넓이를 구하여라.(KMO 23회)

탐구종합 8 (168)

넓이가 18 인 정삼각형 ABC에서 $\overline{AC}$ 의 중점을 M이라 하자. $\overline{BM}$ 위의 적당한 점 D를 잡은 후 $\overline{AD}$ 를 기준으로 점 M의 반대쪽에 점 E를 잡아 정삼각형 ADE를 만들었다. $\overline{DE}$ 와 $\overline{AB}$ 의 교점 F에 대하여, $\overline{EF}:\overline{FD}=4:1$이라 할 때, $\square AEBD$의 넓이를 구하여라.

도전예제 >>>

1 도전예제 (169)

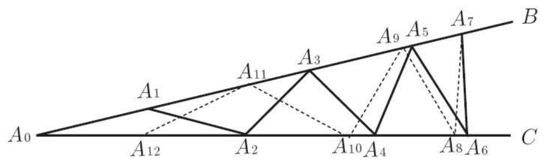
원리탐구

$\angle BA_0C=14^\circ$ 인 두 반직선 A_0B, A_0C 위에 다음과 같이 점 $A_1, A_2, \cdots$ 를 찍는다.

(ⅰ) 먼저 점 A_1 를 반직선 A_0B 위에 임의로 찍는다.(단, $A_0\neq A_1$)

(ⅱ) $n\geq 2$ 에 대하여 점 A_{n-1} 이 반직선 A_0B 위에 있으면 점 A_n 을 반직선 A_0C 위에, 그리고 점 A_{n-1} 이 반직선 A_0C 위에 있으면 점 A_n 을 반직선 A_0B 위에 $A_{n-2}A_{n-1}=A_{n-1}A_n$ 되도록 찍는다. $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ 이 모두 서로 다르다고 할 때, 점 A_n 을 찍을 수 있는 n 의 최대값을 구하여라.

풀이 답: 12



$\angle A_0A_2A_1=14^\circ$,$\angle A_0A_3A_2=14^\circ\times 2$, $\angle A_0A_4A_3=14^\circ\times 2+14^\circ=14^\circ\times 3$,
$\angle A_0A_5A_4=14^\circ\times 3+14^\circ=14^\circ\times 4$, 따라서 14° 씩 증가한다.
$\angle A_0A_7A_6=14^\circ\times 6=84^\circ$,$\angle CA_6A_7=98^\circ$ 이므로 A_8 은 A_6 을 중심으로 A_0 쪽에 있어야 한다.
($\because$ A_6 의 오른쪽에 있다면, 두 밑각의 크기가 둘 모두 98° 가 되어야하므로 불가능하다.)
$\angle A_0A_6A_7=\angle A_7A_8C=82^\circ$, $\angle A_6A_7A_8=16^\circ$ 이므로
$\angle A_0A_7A_8=\angle A_0A_7A_6-\angle A_6A_7A_8=84^\circ-16^\circ=68^\circ$, $\angle A_0A_8A_9=54^\circ$, $\angle A_0A_9A_{10}=40^\circ$ 이므로 14° 씩 감소한다. $\angle A_0A_{11}A_{12}=12^\circ<14^\circ$, $\angle A_0A_{11}A_{12}=\angle A_{13}A_{11}A_{12}=12^\circ$ 이고 A_{13} 은 $\overrightarrow{A_0B}$ 위에 있어야 하는데 $\angle A_{13}A_{11}A_{12}=12^\circ<14^\circ$ 이므로 A_{13} 은 $\overrightarrow{BA_0}$ 상의 A_0 왼쪽에 있을 수 밖에 없다. $\therefore$ n 의 최대값은 12 이다.

2 도전예제 (170)

원리탐구

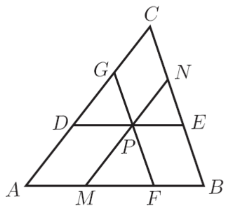
$\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=7$ 이고 길이가 같은 세 선분 $\overline{DE}$, $\overline{MN}$, $\overline{FG}$ 가 한 점 P 에서 만나고 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 와 평행할 때, $\overline{AM}:\overline{MF}:\overline{FB}$ 를 구하여라.

풀이 **답:** $47:23:37$

$\overline{AM}:\overline{MF}:\overline{FB}=x:y:z$ 라 하면 $\triangle DPG \backsim \triangle MFP \backsim \triangle PEN$ 이므로 닮은비도 $x:y:z$ 이고,

$\overline{DP}=5x$, $\overline{GP}=6x$, $\overline{DG}=7x$, $\overline{MF}=5y$, $\overline{PF}=6y$, $\overline{MP}=7y$,

$\overline{PE}=5z$, $\overline{NE}=6z$, $\overline{PN}=7z$ 이다.



$\overline{DE}=\overline{GF}=\overline{MN}$ 이므로 $5x+5z=6y+6x=7z+7y=k$ 에서

$x+z=\frac{1}{5}k \cdots ①$, $y+x=\frac{1}{6}k\cdots ②$, $z+y=\frac{1}{7}k\cdots ③$

①, ②, ③을 연립하여 풀면 $x+y+z=\frac{107}{420}k$ 에서

$x=\frac{47}{420}k$, $y=\frac{23}{420}k$, $z=\frac{37}{420}k$ 이므로 $x:y:z=47:23:37$ 이다.

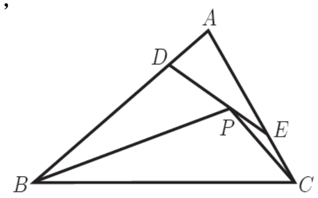
3 도전예제 (171)

원리탐구

그림에서 $\overline{AD}:\overline{DB}=1:3$, $\overline{AE}:\overline{EC}=2:1$이고 점 P는 $\overline{DE}$ 위의 점이다.

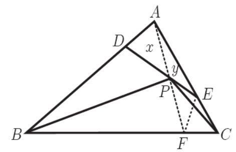
$\triangle PBC=\frac{1}{2}\triangle ABC$, $\triangle DBP$의 넓이가 $30(cm^2)$일 때,

$\triangle ABC$의 넓이를 구하여라. (성대 중2, 11회, 합)



풀이 **답:** $100(cm^2)$

$\triangle ADP$, $\triangle APE$의 넓이를 각각 x, y라 하자.



$\triangle PBC=\frac{1}{2}\triangle ABC$이고, $\triangle ABC$와 $\triangle PBC$의 밑변은 공통이므로

$\overline{AP}:\overline{PF}=1:1$이다. $\triangle PDB=3x$이므로 $\triangle BPF=\triangle BPA=4x$이다.

$\triangle APE=\triangle FPE=y$이고, $\overline{AE}:\overline{EC}=2:1$이므로

$\triangle EFC=\frac{1}{2}\triangle AFE=\triangle APE=y$이다. 그러므로 $\triangle ABC=8x+3y$이다.

$\triangle ADE=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\triangle ABC=\frac{1}{6}\triangle ABC$ 이므로 $x+y=\frac{1}{6}(8x+3y)$, $y=\frac{2}{3}x$이다.

$\triangle ABC=8x+3y$에 $y=\frac{2}{3}x$를 대입하면 $\triangle ABC=8x+2x=10x$이다.

그러므로 $\triangle DBP$의 넓이가 $30(cm^2)$이므로 $\triangle ABC$의 넓이는 $100(cm^2)$이다.

도전종합 >>>

도전종합 1 (172)

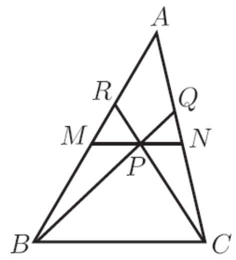
점 P는 $\triangle ABC$의 내부에 있다. 그리고 직선 PA는 $\overline{BC}$와 점 D에서 만난다. 또한 직선 PB는 $\overline{CA}$와 점 E에서 만난다. 그리고 직선 PC는 $\overline{AB}$와 점 F에서 만난다. 또한 $\overline{PD}=\overline{PE}=\overline{PF}=3$, $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=43$이 성립한다. 이때, 세 선분의 길이의 곱인 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}$의 값을 구하여라. 에이미6회 12번 숫자 바꿔볼 것

도전종합 2 (173)

$\triangle ABC$에서 $\angle A=20^\circ$, $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{AM}=\overline{BC}$가 되도록 $\overline{AB}$위에 M을 잡을 때, $\angle AMC$의 크기를 구하여라.

도전종합 3 (174)

$\triangle ABC$의 두 변 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점을 각각 M, N이라 하고, $\overline{MN}$위의 임의의 한 점 P에 대하여 $\overline{BP}$의 연장선과 $\overline{AC}$의 교점을 Q, $\overline{CP}$의 연장선과 $\overline{AB}$의 교점을 R이라 할 때, $\dfrac{\overline{AR}}{\overline{RB}}+\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$의 값을 구하여라.



도전종합 4 (175)

$\angle B=\angle C=80^\circ$인 이등변 $\triangle ABC$의 변 CA, AB위에 각각 점 D, E를 잡고, $\angle CBD=60^\circ$, $\angle BCE=50^\circ$일 때, $\angle BDE$의 크기를 구하여라.