100 문제를 푸는 것보다 문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

Mathematics
The discovery of logos series Olympiad 300

수학 올림피아드 300제

논술형 수학경시 대비서
(중등 KMO2차·고등 KMO 이론편)

Mathematics
the Discovery of Dharma 300 problems

저자 최경호

원리탐구

제 1강 정수론(1)

탐구예제 >>

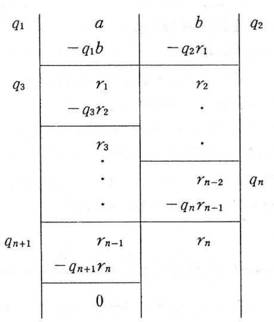
탐구예제 1 (001)

$a=bq+r$ 의 관계가 있는 정수들에는 $\gcd(a,b)=\gcd(b,r)$ 이 성립함을 증명하여라.

[해설]

명제에서 q는 의미가 없으므로, $a=bq+r$ 대신 $a\equiv r \pmod b$로 표현하자.
그리고 $\gcd(a,b)=m$, $\gcd(b,r)=n$ 이라 하자.
먼저 $m|a$, $m|b$ 이므로($\because$ 최대공약수는 공약수), $m|(a-bq)$, 즉 $m|r$ 이 성립한다. 즉, m은 b와 r의 공약수가 되고, 따라서 최대공약수 n보다 크지 않다. $\therefore\ m\leq n$
마찬가지로 $n|b$, $n|r$이므로 $n|bq+r$, 즉 $n|a$가 성립한다. 즉, n은 a와 b의 공약수가 되고, $n\leq m$임을 얻을 수 있다. 따라서 $m=n$일 수 밖에 없다.

(참고) Euclid 호제법
a를 b로 나누면 나누기 연산에 의하여 $\exists q_1,\ r_1\in Z:\ a=q_1b+r_1,\ 0\leq r_1<b$
만약 $r_1=0$이면 $b=\gcd(b,\ r_1)=\gcd(a,\ b)$. $r_1\neq 0$이면 b를 r_1으로 나눈다. 그러면 다시 나누기 연산에 의하여 $\exists q_2,\ r_2\in Z:\ b=q_2r_1+r_2,\ 0\leq r_2<r_1$.
만약 $r_2=0$이면 $r_1=\gcd(r_1,\ r_2)=\gcd(b,\ r_1)=\gcd(a,\ b)$. $r_2\neq 0$이면 r_1을 r_2로 나눈다. …이와 같은 과정을 되풀이 시행하면 결국엔 유한 번 시행 후에
$\exists q_{n+1}, r_{n+1}\in Z: r_{n-1}=q_{n+1}r_n+r_{n+1}(r\neq 0,\ r_{n+1}\neq 0)$.
과 같은 형태의 식을 얻게 될 것이다.
(왜냐하면, $b>r_1>r_2>...\geq 0$)
$r_n=\gcd(r_n,\ r_{n+1})=...=\gcd(r_1,\ r_2)=\gcd(b,\ r_1)=\gcd(a,\ b)$.
이 방법을 오른쪽과 같은 그림으로 나타낼 수 있다.
$\therefore\ r_n=\gcd(a,\ b)$.



탐구유제 1 (002)

$9n+2$ 과 $19n+5$ 의 최대공약수가 1보다 크게 되는 모든 n을 구하여라.

탐구예제 2 (003) (올3, 19)

$a,\ b,\ c\in Z$이고, a와 b 둘 중에서 적어도 하나는 0이 아니라고 하자. 어떤 $s,\ t\in Z$에 대하여 $as+bt=c$일 때, 선형방정식 $ax+by=c$는 모든 정수 k에 대하여

$$x=s-\frac{bk}{d},\ y=t+\frac{ak}{d}$$

를 일반해로 가짐을 증명하여라. (단, $d=\gcd(a,\ b)$이다.)

[해설]

이제 $x',\ y'$을 선형 방정식 $ax+by=c$의 임의의 해라고 하자.
$as+bt=c=ax'+by'$에서 $a(s-x')=b(y'-t)$. $a=a'd$, $b=b'd$라 놓으면, a'와 b'은 서로 소이다.
또한 $a'(s-x')=b'(y'-t)$로부터 $a'|b'(y'-t)$이므로, $a'|(y'-t)$, 즉 적당한 정수 k에 대하여 $y'=t+a'k=t+\frac{ak}{d}$이고, 이것을 $a'(s-x')=b'(y'-t)$에 대입하면 $a'(s-x')=b'a'k$,
$x'=s-b'k=s-\frac{bk}{d}$이다.
따라서 어떤 $s,\ t\in Z$에 대하여 $as+bt=c$일 때, 선형방정식 $ax+by=c$는 모든 정수 k에 대하여 $x=s-\frac{bk}{d},\ y=t+\frac{ak}{d}$ 이다.

(참고) a와 b가 서로 소이면 선형 방정식 $ax+by=c$는 항상 해를 가짐을 쉽게 알 수 있다. 또한 임의로 주어진 선형 방정식 $ax+by=c$의 일반해를 구하려면, 우선 $\gcd(a,\ b)=d|c$를 확인해 본다. $d\nmid c$이면, 주어진 선형 방정식은 해가 없음을 알 수 있다. $d|c$이면 Euclid 호제법 등을 이용하여 $as'+bt'=d$인 $s',\ t'$을 구한다. 그러면, $s=\frac{s'c}{d}$, $t=\frac{t'c}{d}$가 주어진 선형 방정식의 특수해가 되고, 이 특수해로부터 일반해를 구할 수 있다.

탐구유제 2 (004)(올3, 20)

$162x+138y=24$의 일반해를 구하여라.

탐구예제 3 (005)

$111111111 \div 9 = 12345679$, $888888888 \div 9 = 98765432$ **이다. 이것을 이용하여**
$\underbrace{111 \cdots 11}_{2008개} \times \underbrace{111 \cdots 11}_{2008개}$ **을 계산했을 때 각 자리에 나타나는 수의 합을 구하라.**

[해설]

$$\underbrace{111 \cdots 11}_{2008개} \times \underbrace{999 \cdots 99}_{2008개} \div 9 = \underbrace{111 \cdots 11}_{2008개} \times (10^{2008} - 1) \div 9$$

$$= (\underbrace{111 \cdots 11}_{2008개} \times 10^{2008} - \underbrace{111 \cdots 11}_{2008개}) \div 9 = \underbrace{111 \cdots 11}_{2007개}0\underbrace{888 \ldots 888}_{2007개}9 \div 9$$

$$= \underbrace{111 \cdots 11}_{2007개} \times 10^{2009} \div 9 + (\underbrace{888 \cdots 88}_{2007개} \times 10) \div 9 + 1$$

$$= \underbrace{123456790123456790 \cdots 12345679012345679}_{2006개} \times 10^{2009}$$

$$+ \underbrace{987654320987654320 \cdots 987654320987654320}_{2006개} + 1$$

$$= (1+2+3+4+5+6+7+9) \times 223 + (9+8+7+6+5+4+3+2) \times 223 + 1$$

$$= 8251 + 9812 + 1 = 18064$$

탐구유제 3 (006) *탐구종합20* (035)

다음 두 정수 a, b **는 각각 2007자리의 수이다.**

$$a = \underbrace{999 \cdots 99}_{2007개} (9가\ \ 2007개),\ \ b = \underbrace{888 \cdots 88}_{2007개} (8이\ \ 2007개)$$

이때, $a \times b$ **의 각 자리에 있는 수들의 총합을 구하여라.**

탐구예제 4 (007) (올3, 38)

$(x_1)^4 + (x_2)^4 + \cdots + (x_{14})^4 = 16x_{15} + 15$ **의 정수해가 없음을 보여라.**

[해설]

$$(2m+1)^4 = 16m^4 + 32m^3 + 24m^2 + 8m + 1 \equiv 8m(3m+1) + 1 \equiv 1 \pmod{16}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because\ \ m = 2n \Rightarrow 8m(3m+1) = 16n(6n+1) \\ \quad\ \ m = 2n+1 \Rightarrow 8m(3m+1) = 16(2n+1)(3n+2) \end{array}\right)$$

따라서 홀수의 네제곱은 항상 $1 \pmod{16}$ **이다.**

한편, 짝수의 네제곱은 항상 $0 \pmod{16}$ **이다.**

$\therefore\ (x_1)^4 + (x_2)^4 + \cdots + (x_{14})^4 \equiv 0, 1, 2, \cdots, 14 \pmod{16}$

그러나 $16x_{15} + 15 \equiv 15 \pmod{16}$ **이므로 주어진 방정식의 정수해는 존재하지 않는다.**

탐구유제 4 (008) M^2고급 75쪽

$a^2 + b^2 + c^2 = 2abc$ **의 양의 정수해를 모두 구하여라.**

탐구예제 5 (009) (올1, 21, IMO 79)

$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$ **일 때, p는 1979 의 배수임을 증명하여라.**

[해설]

우변에서 양의 항은 분모가 홀수이고 음의 항은 분모가 짝수라는 사실을 알 수 있다.

한편 $\frac{1}{2k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{2k}$**이므로,**

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{1319}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1318}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{1319}\right)-\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{659}-\frac{1}{1318}\right)\right\}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{659}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\ldots+\frac{1}{1319}\right)$$

한편, $\frac{1}{660+j}+\frac{1}{1319-j}=\frac{1979}{(660+j)\bullet(1319-j)}$ **이므로** $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 329$ **를 위 식에 대입하면**

$$\frac{p}{q}=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}-\frac{1}{1318}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)$$
$$=\frac{1979}{660\bullet1319}+\frac{1979}{661\bullet1318}+\ldots+\frac{1979}{989\bullet990}$$
$$=\frac{1979\bullet p'}{660\bullet661\bullet662\bullet\ldots\bullet1318\bullet1319}$$ **(단, p'은 정수)**

1979가 소수이고 $1979\nmid660,\ 1979\nmid661,\ \ldots,\ 1979\nmid1319$ **이므로** $1979\nmid660\bullet661\bullet\cdots\bullet1319$

즉, 1979는 소수이고 660에서 1319까지의 곱의 약수가 아니므로 $\frac{q}{p}$**의 마지막 식을 기약분수로 고쳐도 분자의 1979는 약분되지 않는다.** $\therefore p$**는 1979의 배수이다.**

탐구유제5 (010) M초급 53쪽

임의의 정수 x에 대하여 $\frac{x^5}{15}-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{5}x$**가 짝수임을 증명하여라.**

탐구예제 6 (011) M고급 77쪽(1897헝가리)

임의의 자연수 n에 대하여 다음 식이 1897로 나누어짐을 증명하여라.

$$A=2903^n-803^n-464^n+261^n$$

[해설]

임의의 자연수 n에 대해 $a-b$가 a^n-b^n을 나눈다는 사실과 $A=\alpha\cdot\beta$(단 α,β는 서로소)에서 A의 배수임을 증명하려면 α의 배수이면서 β의 배수임을 이용하자.

$271\mid2903-464$ **이고,** $271\mid803-261$ **이므로** $271\mid\left(2903^n-464^n\right)-\left(803^n-261^n\right)$ **이다.**

또한 $7\mid2903-803,\ 7\mid464-261$ **이므로** $7\mid\left(2903^n-803^n\right)-\left(464^n-261^n\right)$ **이다.**

즉 271 과 7은 서로소이므로 $1897=271\cdot7$ **도** $2903^n-803^n-464^n+261^n$ **을 나누어떨어지게 한다.**

탐구유제 6 (012) M중급 54쪽 (헝가리81)

$2^8+2^{11}+2^n$**이 완전제곱수가 되도록 하는 n을 구하여라.**

종합문제 >>>

1. (013)(IMO'60)(올3, 16)

세 자리 수 n이 11의 배수이고, 각 자리수의 제곱의 합이 $\dfrac{n}{11}$이라고 할 때, 이러한 자연수 n을 모두 구하여라.

2. (014) 창작

12진법에서 3, 11, 16의 배수 판정법을 설명하여라.

3. (015)(올3, 21)

어떤 섬나라에는 화폐가 10원, 12원, 15원 짜리의 세 종류뿐이라고 한다. 거스름돈을 받지 않고는 정확하게 지불할 수 없는 가장 큰 금액(원)을 구하여라.

4. (016)(엠 고급 41쪽)

$7497x+19278y=1071$을 만족하는 정수해 $x,\ y$를 모두 구하여라.

5. (017)

$a^2+b^2+c^2+d^2=2abcd$**의 양의 정수해가 없음을 보여라.**

6. (018)동아리2, 37쪽 72번

$\underbrace{333\cdots33}_{100개}$ **으로 나누어떨어지는 수** $\underbrace{111\cdots11}_{n개}$ **에서 최소의** n **을 구하여라.**

7. (019)(올3, 21) (IMO'77)

a, $b\in N$**에 대하여** a^2+b^2**을** $a+b$**로 나누었을 때, 그 몫을** q, **나머지를** r**이라고 하자.** $q^2+r=1977$**이 되도록 하는** a, b**를 모두 구하여라.**

8. (020)(15회 KMO)

n **을 어떤 쌍둥이 소수의 곱이라고 하자** n **의 (양의)약수의 합을** $s(n)$ **이라 하고,** n **보다 작은 자연수 중에서** n **과 서로 소인 것들의 개수를** $p(n)$ **이라 할 때,** $s(n)p(n)$ **을** n **의 식으로 나타내어라.(단, 쌍둥이 소수는 차이가 2 인 두 소수를 뜻한다.)**