100 문제를 푸는 것보다 1가지 원리를 가르칩니다!

경시대회 · 영재교육원 대비
원리탐구 초등 수학

도전 Ⅰ(상)(초6)

The discovery of dharma Series Challenge Ⅰ

최 경호 지음

최상위권 학생이 되기 위한
고난이도 문제 · 퍼즐 · 생활속의 수학 · 읽을거리

홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이

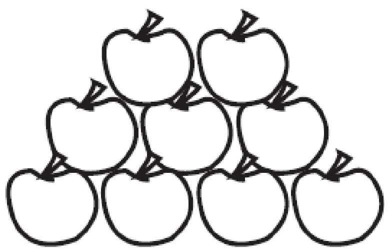
MATHEMATICS

원리탐구

초등수학 도전Ⅰ(상)(최상위 초6) 차례

	생활 속의 수학	읽을거리
제 1강	1. 주민등록번호 2. 소수 년은 주기로 출현하는 매미의 유리한 점	1. 독이든 포도주 찾기 2. 소수는 어디에 쓰이는가? 3. 수학이란 말은 피타고라스가 처음 사용했다.
제 2강	1. 공동 부엌에서 2. 원리파리가 날아간 거리	1. 프랑스 오베르뉴 지방의 농민들의 오구단(?) 2. 보고서 쓰기
제 3강	1. 동전 옮기기	1. 왜 소문은 이렇게 빠르게 전파되는 것일까?
제 4강	1. 우리 머리카락의 수명 2. 논밭의 넓이, 인간의 번뇌	1. 불태운 책들 2. 피타고라스의 정리를 증명한 대통령 3. 걸리버의 식사량은 소인국 사람 1728명 분인 이유

제 1강 수와 연산



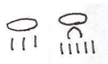
도전예제 A

1. 이집트인의 분수 계산

고대 이집트의 수학을 연구하는 데 중요한 자료가 되고 있는 린드(혹은 아메스) 파피루스에는 이집트인들의 분수 사용에 관한 글이 실려 있다.

이집트인들은 단위분수, 즉 분자가 1인 분수만을 다루었는데(예외적으로 $\frac{2}{3}$ 만은 특별한 기호()를 사용하여 표시하였다.) 단위분수는 분모 위에 타원 기호를 씀으로써 이집트의 상형문자로 표시하였고, 분자가 1이 아닌 분수를 표현하기 위해서는 단위분수를 여러 개 붙여서 표현하였다.

예를 들어, $\frac{2}{5}$ 는 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{15}$ ($\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$)로 다음과 같이 나타내었다. 이 때, +기호는 사용하지 않았다.



또, $\frac{2}{7}$ 는 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{28}$ ($\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$)로 다음과 같이 나타내었다.

지금이라면 2를 5로 나눌 경우 단순히 $\frac{2}{5}$ 로 표기하지만, 이집트에서는 현실적인 필요 때문에 일부러 다른 분모를 사용한 단위분수의 합으로 나타내었던 것이다.
이집트인의 이러한 분수 표현법에 대해서는 다음과 같은 해석이 가능하다.

예를 들면, 다섯 사람에게 2개의 빵을 나누어 먹으라고 하면 우선 각 빵을 $\frac{1}{3}$씩 나누어 다섯 사람이 한 조각씩 갖고, 남은 한 조각을 다시 다섯 조각으로 나누어 한 조각씩 가질 것이다. 이 때, 다섯 조각으로 나눈 것은 실제로는 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$로 나눈 것이다.

따라서 한 사람당 $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$을 먹는 셈이다.

이와 같이 단위분수가 아닌 분수를 단위분수의 합으로 어떻게 쉽게 표현할 수 있을까?
다음과 같이 약수를 이용하면 편리하다.
단위 분수의 합이 되려면 분자가 분모의 약수이어야 약분되어 분자가 1이 되며, 합이 분할되기 전의 분수의 분자가 되어야한다.

$\frac{2}{5}$를 예를 들어보자.

(ⅰ) $\frac{2}{5}$ 에서 분모 5의 약수인 $1, 5$ 중에서 두 수를 더하여 분자인 2가 되는 수는 없다.

(ⅱ) $\frac{2\times2}{5\times2}=\frac{4}{10}$ 에서 분모 10의 약수인 $1, 2, 5, 10$ 의 4개의 약수 중에서 두 수를 더하여 분자인 4가 되는 수는 없다.

(ⅲ) $\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{6}{15}$ 에서 분모 15의 약수인 $1, 3, 5, 15$ 의 4개의 약수 중에서 두 수를 더하여 분자인 6이 되는 수는 $1, 5$이다. 따라서 $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{5}{15}+\frac{1}{15}\Rightarrow\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$이다.

1 도전예제

원리탐구

크기가 같은 빵 7개를 8명의 학생이 공평하게 나누어 먹으려고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) $\frac{7}{8}$을 3개의 단위분수의 합으로 나타내어라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 빵 7개를 8등분하는 방법을 설명하여라.

풀이 답: (1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ (2) 풀이참조

단위 분수의 합이 되려면 분자가 분모의 약수이어야 약분되어 분자가 1이 되며, 합이 분할되기 전의 분수의 분자가 되어야한다.

(1) 분모 8의 약수 중 세 수의 합이 7이 되는 경우를 찾으면 된다. 8의 약수는 1, 2, 4, 8이고 이 중 세 수 1, 2, 4의 합이 7이 된다. 따라서 $\frac{7}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$이다.

(2) 4개의 빵은 각각 2등분($\frac{1}{2}$씩 8조각), 2개의 빵은 각각 4등분($\frac{1}{4}$씩 8조각), 나머지 1개의 빵은 8등분($\frac{1}{8}$씩 8조각)해서 8명에게 세 종류의 빵조각을 하나씩 나누어주면 된다.

유제 1

다음 분수를 두 단위분수의 차와 합으로 나타내려고 한다. A, B에 알맞은 자연수를 각각 구하여라.

(1) $\frac{1}{3}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}$ (2) $\frac{2}{7}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$

2. 번분수에서 분모, 분자에 같은 수를 곱하는 편리한 계산

분수의 분모 분자에 또다시 분수가 들어있는 분수를 번분수라고 한다.

$\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{2}{4}$인 것과 같이 수학에서는 분모, 분자에 같은 수를 곱하여도 변화가 없다. 번분수의 분모의 분모, 분자의 분모의 최소공배수를 분모 분자에 곱하여 것을 활용하면 계산이 더욱 편리해진다. 번분수에 관한 계산은 풀이 방법이 여러 가지 있으나 복잡 할수록 분모의 분모, 분자의 분모의 최소공배수를 분모 분자에 곱하면 더욱 편리해진다.

예를 들면 다음과 같다.

(예 1) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ 에서 분모의 분모 2와 3, 분자의 분모의 3의 최소공배수 6을 분모 분자에 곱하면, 즉 $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{2}{3}\times6}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\times6}=\dfrac{4}{3-2}=4$ 가 된다.

(예 2) $\dfrac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}=\dfrac{\frac{d}{c}\times ac}{\frac{b}{a}\times ac}=\dfrac{cd}{bc}$

2 도전예제

원리탐구

다음 분수의 값을 구하여라.

(1) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$ (2) $\dfrac{1+\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}{1-\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}$

풀이 답: (1) $\frac{4}{7}$ (2) 3

(1) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}$의 분모, 분자에 3을 곱하면 $\dfrac{3}{4}$이 되므로 (준식)$=\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{4}}$이되고 분모, 분자에 4을 곱하면 $\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{4}{7}$이다.

(2) $\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}$와 $\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}$의 분모, 분자에 2을 곱하면 $\dfrac{1+1}{1-\dfrac{1}{3}}=3$이다.

유제 2

다음 분수의 값을 구하여라.

(1) $\dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}$ (2) $\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}$

3. 부분분수로 고쳐서 계산하기

부분분수로 고치는 문제는 분모를 두 수의 곱으로 표현했을 때, 두 수의 차가 분자에 있을 경우 (1)번을, 두 수의 합이 분자에 있을 경우 (2)번을 이용하는 것이 편리하다.

(1) $\dfrac{B-A}{AB}=\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B} \quad \therefore \dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$

예, $\dfrac{2}{15}=\dfrac{2}{3\times5}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5} \quad \therefore \dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{3\times5}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})$

(2) $\dfrac{A+B}{AB}=\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B} \quad \therefore \dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{A+B}\left(\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}\right)$

예, $\dfrac{8}{15}=\dfrac{8}{3\times5}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5} \quad \therefore \dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{3\times5}=\dfrac{1}{8}(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5})$

예를 들면 다음과 같다.

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}$

$=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\dfrac{1}{4\times5}=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

(2) $\dfrac{4}{3}-\dfrac{7}{12}+\dfrac{9}{20}-\dfrac{11}{30}$

$=\dfrac{4}{1\times3}-\dfrac{7}{3\times4}+\dfrac{9}{4\times5}-\dfrac{11}{5\times6}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)-\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

3 도전예제

원리탐구

〈보기〉와 같은 성질을 이용하여 다음을 계산하여라.

-------------〈보기〉--------------

$$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5},\cdots$$

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}$$

풀이 답: $\frac{5}{14}$

분모가 연속된 두 자연수의 곱인 단위분수는 두 자연수가 분모인 두 단위분수의 차로 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}=\frac{7}{14}-\frac{2}{14}=\frac{5}{14}$$

유제 3

다음을 계산하여라.

(1) $\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$ (2) $\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}$

4. 연속한 수의 합이 될 가능성 판별법

1부터 연속된 수 얼마까지의 합이 주어진 수가 되는 가를 구하고, 주어진 수를 소인수 분해하여 그 개수까지 다음과 같이 분석 한다.

(1) 연속한 수의 개수가 홀수일 경우

연속한 숫자의 개수로 소인수 분해되어야 한다. 즉 연속 세수는 3의 배수, 연속 다섯 수는 5의 배수, 연속 일곱 수는 7의 배수…이여야 한다. 왜냐하면 (중간 수)×(연속한 수의 개수)=(주어진 수)가 되기 중간 수를 중심으로 더하고 뺀 수가 연속하기 때문이다.

문자로 나타내면 다음과 같다.

연속한 세 수: $(x-1)+x+(x+1)=3x$

연속한 다섯 수: $(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=5x$

⋮

(2) 연속 수의 개수가 짝수일 경우

(i) 연속 수를 2로 나눈 다음, 그 수로 주어진 수를 나눈 값이 홀수가 되어야 한다. 즉, 연속된 두수는 $2\div2=1$이므로 그 수가 홀수이여야 하고, 연속된 네 수는 $4\div2=2$이므로 2로 나누어 몫이 홀수가 되어야하며, 연속된 여섯 수는 $6\div2=3$이므로 3로 나누어 몫이 홀수…가 되어야한다.

왜냐하면 연속한 수의 개수의 $\frac{1}{2}$로 나누면 중간 두수가 되며, 중간 두수가 홀수가 되어야 연속한 두 수가 될 수 있기 때문이다.

문자로 나타내면 다음과 같다.

연속한 두 수: $x+(x+1)=2x+1$

연속한 네 수: $(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=4x+2=(2x+1)\times2$

연속한 여섯 수: $(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=6x+3=(2x+1)\times3$

⋮

(ii) 연속한 짝수의 개수가 $2n$일 때, $2n$으로 나누어 나머지가 n이 되어야 한다.

즉, 연속한 $2n$개의 수는 다음과 같다.

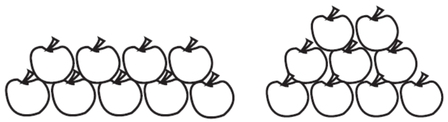
$$x-(n-1)+x-(n-2)+\cdots+(x-1)+x+(x+1)+\cdots+(x+n-1)+(x+n)=2nx+n$$

4 도전예제

원리탐구

같은 크기의 사과를 한 층씩 위로 쌓을 때마다 1 개씩 줄어들도록 한다. 아래 〈보기〉는 이와 같은 방법으로 사과 9 개를 쌓을 수 있는 두 가지 경우를 보인 것이다. 사과 45 개를 〈보기〉와 같이 여러 가지 방법으로 쌓을 때, 가능한 2층 이상의 층수를 구하여라.

〈보기〉



(2 층으로 쌓은 경우) (3 층으로 쌓은 경우)

풀이 답: 2, 3, 5, 6, 9

$45=3\times3\times5$ 이고, $1\sim9$ 까지 합이 45 이므로 9 층으로 쌓는 것까지 가능성이 있다.
$45=3\times15=5\times9=9\times5$이므로 홀수 층인 3, 5, 9층은 가능하다. 즉, 중앙수가 15 인 3층, 중앙수가 9 인 5층, 중앙수가 5 인 9층이 가능하고, 7층은 불가능하다.
나머지 9 층 이하의 짝수 층인 2, 4, 6, 8층을 알아보자.
(i) 2 층으로 쌓는 경우: 45 는 홀수이므로 $45=22+23$ 이다.
(ii) 4 층으로 쌓는 경우: $4\div2=2$ 로 나누어지지 않으므로 불가능하다.
(iii) 6 층으로 쌓는 경우: $45=3\times15$ 이므로 3 으로 나눈 값이 15 인 홀수이므로 가능하며 $45=10+9+8+7+6+5$ 이다.
(iv) 8 층으로 쌓는 경우: 4 의 배수가 아니므로 불가능하다.
따라서 쌓을 수 있는 층은 2, 3, 5, 6, 9 이다.

유제 4
150 은 연속한 수의 합으로 표시하는 방법은 몇 가지인가?

종합문제 A

1. 크기가 같은 빵 7개를 12명의 학생이 공평하게 나누어 먹으려고 한다. 다음 물음에 답하여라.

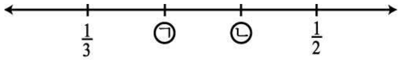
(1) $\frac{7}{12}$ 을 3개의 단위분수의 합으로 나타내어라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 빵 7개를 12등분하는 방법을 설명하여라.

2. 유리수 $\frac{1}{5}$ 을 $\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$ 과 같이 분자를 1 로 하는 서로 다른 두 분수의 합으로 나타낼 수 있다. 같은 방법으로 유리수 $\frac{1}{7}$ 을 나타내어라.(단, 두 분수 중 하나의 분모는 한 자리의 수이다.)

3. 수돌이는 5 일 동안 수학 문제집을 풀었다. 첫째 날은 전체의 $\frac{1}{42}$, 둘째 날은 전체의 $\frac{1}{30}$, 셋째 날은 전체의 $\frac{1}{20}$, 넷째 날은 전체의 $\frac{1}{12}$ 을 풀었다. 아직 풀지 않고 남은 부분은 전체의 얼마인가?

4. 다음 그림은 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$사이를 3등분한 것이다. ㉠과 ㉡의 합을 기약분수로 나타내어라.



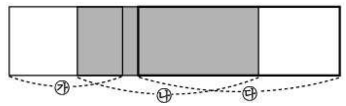
5. 929 에서 그 수의 $\frac{1}{2}$를 빼고, 그 나머지의 $\frac{1}{3}$을 빼고, 다시 그 나머지의 $\frac{1}{4}$을 빼고, … 이와 같이 계속하여 그 나머지의 $\frac{1}{929}$을 뺄 경우 가장 마지막에 남은 수는 얼마인가?

6. 3, 5, 7과 같이 이웃한 두 수의 차가 2 인 세 홀수를 연속한 세 홀수라고 한다. 연속한 세 홀수의 곱이 24273가 되는 세 홀수의 합을 구하여라.

7 다음 분수의 합을 기약분수로 나타낼 때, 분자와 분모에 있는 두 수의 각 자리의 수의 합은 얼마인가?

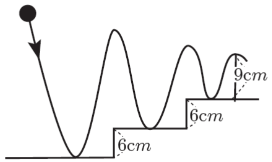
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times2}+\frac{1}{2\times2\times2}+\cdots+\frac{1}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}$$

8. 다음 그림은 세로의 길이가 같고, 가로의 길이가 각각 ㉮, ㉯, ㉰인 직사각형을 겹쳐 놓은 것이다. ㉮의 $\frac{2}{5}$와 ㉯의 $\frac{1}{4}$이 같고, ㉯의 $\frac{2}{3}$와 ㉰의 $\frac{3}{5}$이 같다. ㉮의 16 배는 ㉰의 몇 배와 같은가?



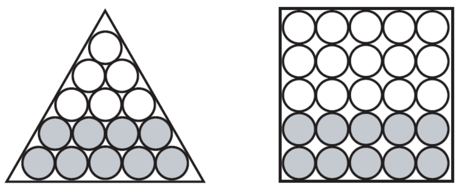
9. $\frac{23}{99}$ 을 세 단위분수의 합 $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}$ 로 나타냈을 때, A, B, C 중에서 가장 큰 수를 구하여라.

10. **공을 어떤 높이에서 떨어뜨리면 그 높이의 75% 까지 튀어 오른다. 다음 그림과 같이 한 단의 높이가 $6cm$ 인 계단을 한 계단씩 튀어 올라 두 번째 계단에 떨어진 후 $9cm$ 튀었다. 처음에 공을 떨어뜨린 높이는 몇 cm 인가?**



11. **100보다 작은 수로 이루어진 연속하는 세 자연수의 합이 15로 나누어떨어지는 경우는 모두 몇 가지인가?**

12. **다음과 같이 삼각형과 사각형 모양의 상자에 위의 3 줄은 흰 공이, 아래의 2 줄은 검은 공이 들어있다. 삼각형 모양의 상자 x 개와 사각형 모양의 상자 y개를 풀어서 합치면 흰 공과 검은 공의 개수가 같을 때, $10\times x+y$ 의 가장 작은 값은 구하여라.**



도전문제 A

1. **세 자리 자연수 중에서 연속하는 10개의 수의 합이면서, 또한 연속하는 14 개의 자연수의 합인 수가 있다. 그와 같은 세 자리 수 중에서 가장 작은 것과 가장 큰 것을 각각 구하여라.**

2. **자연수 1을 〈보기〉와 같이 세 단위분수의 합으로 나타내려고 한다. 나타낼 수 있는 방법은 보기를 포함하여 모두 몇 가지인가?**

------〈보기〉-------

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

----

3. **일요일부터 시작하는 10월 달력에서 어느 한 주의 날짜를 모두 더한 값이 63으로 나누어떨어졌다. 이 주의 금요일이 될 수 있는 날을 모두 구하여라.**