100 문제를 푸는 것보다
문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

원리탐구 중등수학

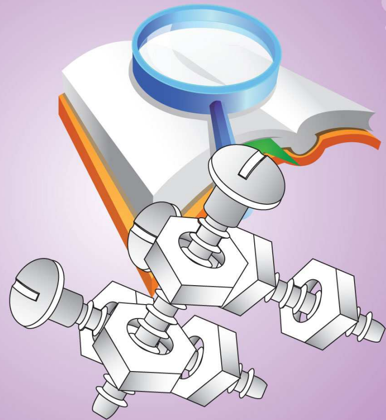
중3 수학(하)

최상위권 학생을 위한 고난이도 문제 **도/전/편**

The discovery of dharma Series Challenge

최 경호 지음

홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이

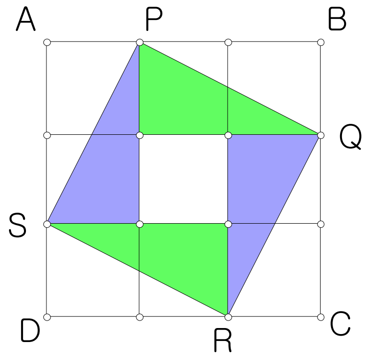


MATHEMATICS

원리탐구

중3 도전(하) 차례

Ⅵ. 피타고라스 정리



도전예제 A

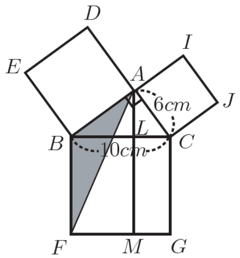
1 도전예제 원리탐구

그림은 $\angle A = 90^\circ$, $\overline{AC} = 6cm$, $\overline{BC} = 10cm$ 인 직각삼각형 ABC의 각 변 위에 정삼각형을 그린 것이다. 다음을 구하여라.

(1) $\triangle ABF$ 와 합동인 삼각형과 넓이가 같은 증명에 쓰이는 삼각형을 그려라.

(2) $\triangle ABF$의 넓이

(3) $\square LMGC$의 넓이



풀이 답: (1) 그림참조 (2) $32(cm^2)$ (3) $36(cm^2)$

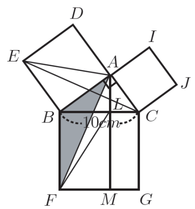
(1) $\triangle ABF \equiv \triangle EBC$이고, $\triangle ABE$, $\triangle LBF$와 넓이가 같다.

(2) $\triangle ABF = \triangle LBF = \dfrac{1}{2}\square LBFM = \dfrac{1}{2}\square ABED$

그런데 $\square ABED = \overline{AB}^2$이고 $\overline{AB}^2 = 10^2 - 6^2 = 64$이다.

$\therefore\ \triangle ABF = \dfrac{1}{2} \times 64 = 32(cm^2)$

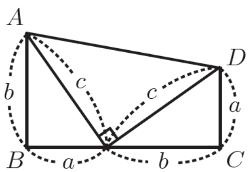
(3) $\square LMGC = \square BFGC - \square BFML = (10 \times 10) - (32 \times 2) = 36(cm^2)$



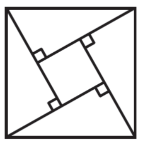
유제 1

다음 그림을 보고 피타고라스의 정리를 설명하여라.(단, (2)의 4개의 직각삼각형은 합동이다.)

(1)



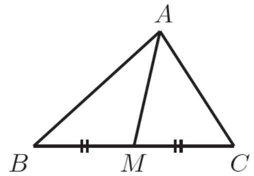
(2)



2 도전예제 원리탐구

$\triangle ABC$의 $\overline{BC}$의 중점을 M이라고 할 때, 다음 등식이 성립함을 증명하여라.
(Pappos의 정리, 중선정리)

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$



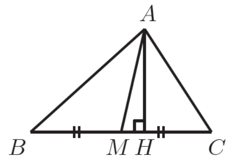
풀이 답: 풀이참조

좌측 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}^2 = (\overline{BM} + \overline{MH})^2 + \overline{AH}^2 \cdots$ ①

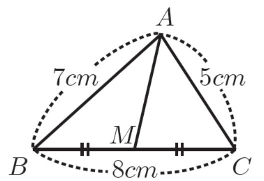
$\overline{AC}^2 = (\overline{MC} - \overline{MH})^2 + \overline{AH}^2 = (\overline{BM} - \overline{MH})^2 + \overline{AH}^2 \cdots$ ②

①+②, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AH}^2 + 2\overline{BM}^2 + 2\overline{MH}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$



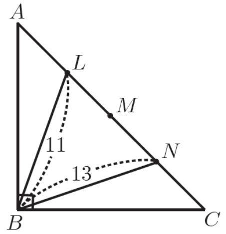
유제 2

$\triangle ABC$의 그림이 다음과 같을 때, $\overline{AM}$의 길이를 구하여라.



3 도전예제 원리탐구

그림과 같이 직각삼각형 ABC에서 빗변 AC의 4등분점을 각각 L, M, N,이라고 하자. $\overline{BL}=11$, $\overline{BN}=13$ 일 때, $\overline{LN}^2$ 은 얼마인가?(kmc 5회 고1)



풀이 답: 116

그림과 같이 L, M, N에서 $\overline{AB}, \overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 $P, Q, R\,;\,X, Y, Z$이라 하고 $\overline{LX}$와 $\overline{NR}$의 교점을 T라고 하자. 또, $\overline{BX}=x$, $\overline{AP}=y$라고 하면 $\overline{LX}=3y$, $\overline{NZ}=y$, $\overline{BZ}=3x$ 임을 알 수 있다. 따라서 $\triangle BXL$에서 $\overline{BL}^2=\overline{BX}^2+\overline{LX}^2$이므로

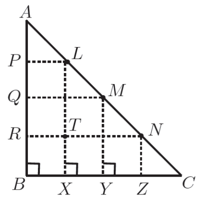
$x^2+9y^2=11^2=121 \quad \cdots ①$

$\triangle BZN$에서 $\overline{BN}^2=\overline{BZ}^2+\overline{NZ}^2$이므로 $9x^2+y^2=13^2=169 \quad \cdots ②$

① + ② 에서 $x^2+y^2=29$

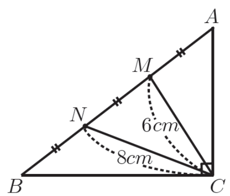
한편, $\triangle LTN$에서 $\overline{LN}^2=\overline{LT}^2+\overline{TN}^2$이므로

$\overline{LN}^2=4y^2+4x^2=4(x^2+y^2)=4\times 29=116$ 이다.



유제 3

직각삼각형 ABC에서 빗변 AB의 삼등분점을 M, N이라하고, $\overline{CM}=6cm$, $\overline{CN}=8cm$일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.



4 도전예제 원리탐구

$\angle B$가 직각이고 $\overline{AB}=\overline{BC}=10$인 직각이등변 삼각형 ABC가 있다. 점 P는 $\overline{BC}$의 중점이고 점 Q, R는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 점일 때, $\triangle PQR$의 둘레의 길이의 최솟값을 x라 한다. x^2의 값을 구하여라.(와이즈219)

풀이 답: 250

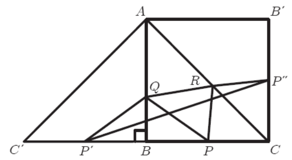
그림과 같이 $\triangle ABC$를 $\overline{AB}$를 축으로 하여 대칭시킨 것을 $\triangle ABC'$, $\overline{AC}$를 축으로 하여 대칭시킨 것을 $\triangle AB'C$라 하자.

$\overline{PQ}=\overline{P'Q}$, $\overline{RP}=\overline{RP''}$ 이므로

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RP''}$ 이다.

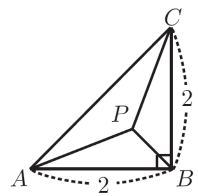
P', Q, R, P'' 이 한 직선 위에 있을 때, $\overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RP''}$ 이 최솟값 $\overline{P'P''}$ 을 가진다.

$\triangle P''P'C$에서 $\overline{P'P''}^2=\overline{P'C}^2+\overline{P''C}^2=15^2+5^2=250$



유제 4

그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=2$이다. $\triangle ABC$의 내부에 있는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$의 최소값을 구하여라.(kmc 9회 고1)



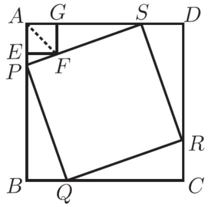
5 도전예제

원리탐구

그림에서 $\square ABCD$, $\square PQRS$, $\square AEFG$는 모두 정사각형이고 $\overline{AB}=16$, $\overline{AP}=4$ 이다.
다음 사각형의 넓이를 구하여라.(kmc 1회 고1)

(1) 정사각형 $PQRS$

(2) $\square AEFG$



풀이 답: (1) 160 (2) 9

(1) $\overline{PS}^2=\overline{AP}^2+\overline{AS}^2=4^2+12^2=16+144=160$, $\square PQRS=\overline{PS}^2=160$

(2) ($\triangle APS$의 면적) $=\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AS}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot12=24$ 이고,

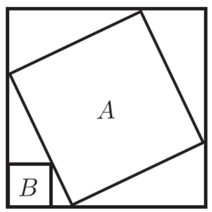
한편, $\triangle APF=\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AE}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\overline{AE}=2\overline{AE}$,

$\triangle AFS=\frac{1}{2}\overline{AS}\cdot\overline{GF}=\frac{1}{2}\cdot12\cdot\overline{AE}=6\overline{AE}$

$\triangle APF+\triangle AFS=\triangle APS$이므로, $2\overline{AE}+6\overline{AE}=24$, $\overline{AE}=3$, $\square AEFG=\overline{AE}^2=9$

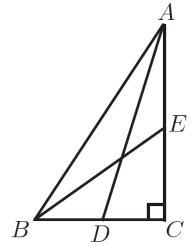
유제 5

크고 작은 세 개의 정사각형이 그림과 같이 놓여 있다. 가장 큰 정사각형의 넓이가 1 이고 정사각형 A의 넓이가 x 이면, 정사각형 B의 넓이를 구하여라.(kmc 8회 고1)

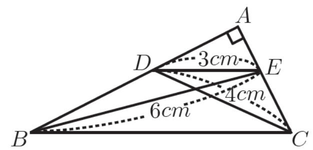


종합문제 A

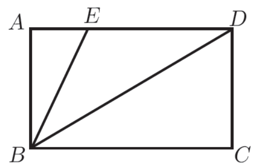
1. 그림과 같은 $\triangle ABC$에서 $\angle C=90°$이고, $\overline{BC}$와 $\overline{AC}$의 중점을 각각 D와 E라고 하자. $\overline{AD}=4$, $\overline{BE}=3$ 일 때, $\overline{AB}^2$ 의 값은 얼마인가? (kmc 3회 고1)



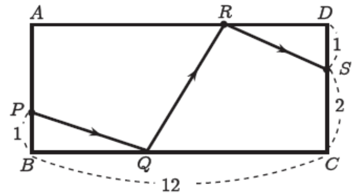
2. 그림과 같이 $\angle A=90°$인 직각삼각형의 빗변의 길이 $\overline{BC}$를 구하여라.



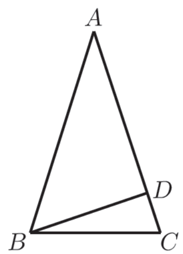
3. 그림의 직사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB}=3$이고, 변 AD 위의 점E에 의하여 선분 BE와 BD는 $\angle ABC$를 삼등분한다. $\triangle BDE$의 둘레의 길이를 구하여라.(kmc 중3, 8회)



4. 직사각형 모양의 방안에 개미 한 마리가 점 P에서 출발하며 그림과 같이 점 S에 도달하였다. 개미가 지나간 최단거리를 구하여라.



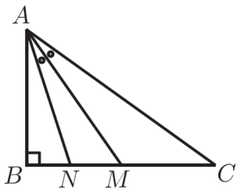
5. $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이고, $\angle A$는 $45°$보다 작다. 꼭지점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라고 하자. $\overline{AC}\cdot\overline{CD}=32$일 때, 변 BC의 길이는 얼마인가?
(kmc 중3, 4회)



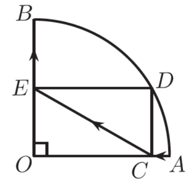
6. 그림 $\triangle ABC$는 $\angle B=90°$, $\overline{BC}=16\,cm$인 직각삼각형이다. $\overline{BC}$의 중점을 M, $\overline{BM}$의 중점을 N이고, $\angle NAM=\angle MAC$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\overline{AN}:\overline{AC}$

(2) $\overline{AB}$의 길이

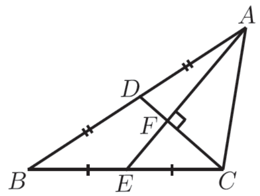


7. 그림과 같이 중심각이 직각이고, 반지름의 길이가 10인 사분원 모양의 땅에 내접하는 직사각형 $OCDE$를 만들어 그 넓이를 48이 되게 하였다. 이 때 $A\to C\to E\to B$의 최단거리를 구하여라.



8. $\triangle ABC$에서 $\angle C=90°$, $\overline{AC}=\sqrt{2}$, $\overline{BC}=1$이다. 점 D는 변 AB의 중점이고 점 E는 변 AC의 중점이며 선분 BE와 CD는 점 F에서 만날 때, $\angle BFC$의 크기는 몇 도인가?

9. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 중점을 각각 D, E라고 하고 $\overline{AE}\perp\overline{CD}$, $\overline{AB}=8cm$, $\overline{BC}=6cm$일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하여라.

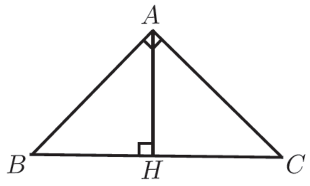


10. 그림의 $\triangle ABC$는 $\angle A=90^\circ$, $\overline{BC}\perp\overline{AH}$이고, $\triangle ABH$와 $\triangle ACH$의 둘레의 길이가 각각 $6, 8$일 때, 다음을 구하여라.

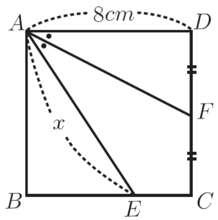
(1) $\triangle ABH$와 $\triangle ACH$의 닮음비

(2) $\overline{AB}:\overline{AC}$

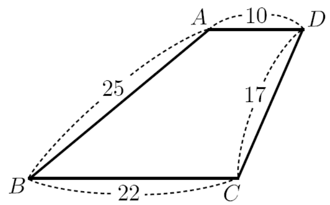
(3) $\triangle ABC$의 둘레의 길이



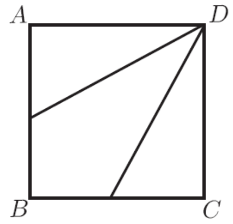
11. 한 변의 길이가 $8cm$인 정사각형 $ABCD$에서 점 F는 $\overline{CD}$의 중점이고, $\angle DAF=\angle EAF$일 때, $\overline{AE}$의 길이를 구하여라.



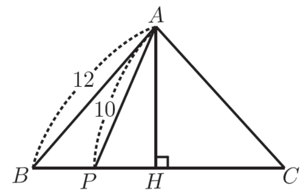
12. 그림과 같은 사다리꼴 $ABCD$에서 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$, $\overline{AB}=25$, $\overline{BC}=22$, $\overline{CD}=17$, $\overline{DA}=10$이다. 사다리꼴$ABCD$의 넓이는 얼마인가? (kmc 3회 고1)



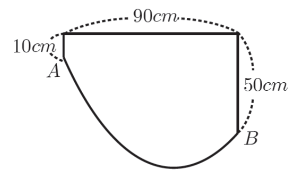
13. 아래와 같이 울타리의 길이가 $2400m$인 정사각형의 목장에 D에만 우물이 있다. 이 우물을 공동으로 사용하고, 넓이가 같도록 3부분으로 나누어 울타리를 그림과 같이 치려고 한다. 새로운 울타리의 길이를 구하여라.



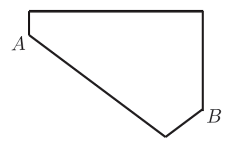
14. 그림과 같은 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=12$이고 $\overline{AP}=10$이다. $\overline{AH}\perp\overline{BC}$일 때, $\overline{BP}\times\overline{PC}$의 값을 구하여라. (kmc 3회 고1)



15. 다음 [그림1]과 같이 두 지점 A, B에 길이가 $150cm$인 끈이 연결되어 있다. A, B는 각각 천정에서 $10cm$, $50cm$만큼 떨어져 있다. 이 끈에 추를 매달았더니 [그림2]와 같이 되었다. [그림2]에서 추와 두 지점 A, B를 연결하는 끈의 모양을 선분으로 생각할 때, 천정에서 추까지의 거리를 구하여라.(단, 추의 길이는 0으로 생각한다.)

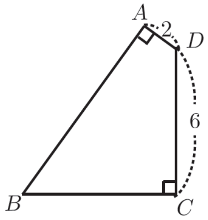


[그림1]

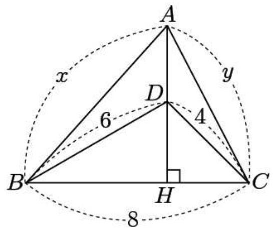


[그림2]

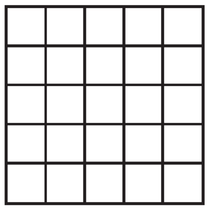
16. 그림과 같이 $\square ABCD$의 각 변의 길이는 모두 자연수이고, $\overline{AD}=2$, $\overline{CD}=6$, $\angle A=\angle C=90^\circ$ 이다. 이 사각형의 둘레의 길이의 최대값을 구하여라.



17. 그림에서 $\triangle ABC$의 둘레의 길이는 20이다. 꼭지점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{AH}$ 위의 한 점을 D라 한다. $\overline{BD}=6$, $\overline{CD}=4$이고 $\overline{BC}=8$일 때, $x-y$의 값을 구하여라.

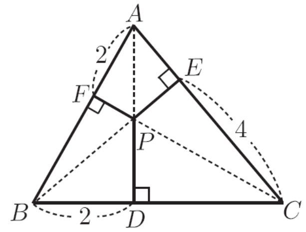


18. 그림은 한 변의 길이가 5인 정사각형의 가로와 세로를 각각 5등분한 것이다. 그림에서 선분을 따라 그릴 수 있는 직사각형 중에서 대각선의 길이가 $\sqrt{30}$ 이상인 것은 모두 몇 개인가?(kmc 5회 고1)



19. 한 변의 길이가 1인 정팔각형의 넓이를 구하여라.(kmc 9회 고2)

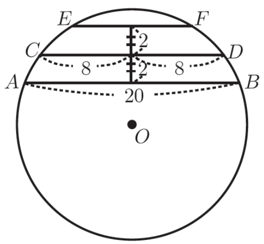
20. 그림과 같이 $\triangle ABC$의 내부의 한 점 P에서 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 한다. $\overline{BD}=2$, $\overline{CE}=4$, $\overline{AF}=2$일 때, $\overline{CD}^2+\overline{AE}^2+\overline{BF}^2$의 값을 구하여라.



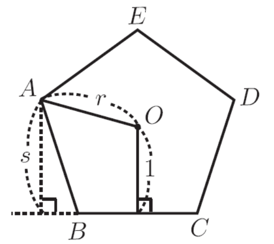
도전문제 A

1. 중심이 O이고 반지름의 길이가 10인 원 위에 있는 두 점 A와 B에 대하여 현 AB는 중심 O로부터 거리가 6이다. 점 P가 원 위를 움직일 때, $m<k<M$을 만족시키는 모든 k에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 k가 되는 점 P가 원 위에 4개씩 존재할 때, $m+M$의 값은 얼마인가? (kmc 6회 고1)

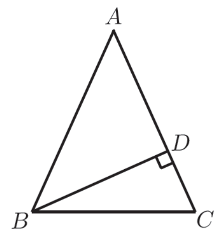
2. 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원 O에 서로 평행인 세 현 AB, CD, EF가 있다. 각 현 사이의 거리는 모두 2이고 $\overline{AB}=20$, $\overline{CD}=16$일 때, $\overline{EF}$, r의 값을 각각 구하여라. (kmc 7회 고2)



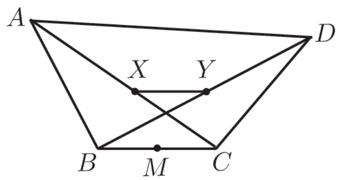
3. 그림과 같이, 정오각형 $ABCDE$의 외접원의 중심 O에서 변 BC에 내린 수선의 길이가 1이다. 꼭지점 A에서 $\overline{BC}$의 연장선 위에 내린 수선의 길이를 s, 원 O의 반지름의 길이를 r이라 할 때, $2s+r$의 값은 얼마인가? (kmc 8회 고1)



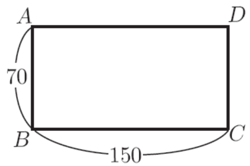
4. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC의 꼭지점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\overline{AD}$, $\overline{CD}$의 길이가 자연수이고, $\overline{BD}^2=57$일 때, $\overline{AC}$의 최소값을 구하여라.



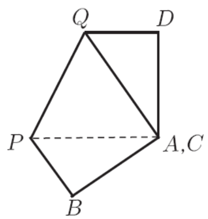
5. $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=5$, $\overline{DA}=\sqrt{109}$, $\overline{AC}=5\sqrt{2}$, $\overline{BD}=7\sqrt{2}$ 인 볼록사각형 $ABCD$의 대각선 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점을 각각 X와 Y라 할 때, $\overline{XY}^2$의 값은 얼마인가?(kmc 7회 고1)



6. [그림1]과 같은 길이가 $150mm$이고 너비가 $70mm$인 1만 원짜리 지폐 한 장을 [그림2]와 같이 왼쪽 위 꼭짓점과 오른쪽 아래 꼭짓점이 포개지도록 접었다. 접힌 선 $\overline{PQ}$의 길이를 구하여라.



[그림1]



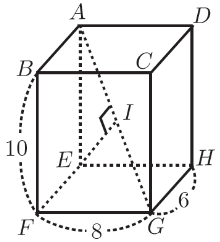
[그림2]

도전예제 B

6 도전예제

원리탐구

그림과 같이 가로, 세로, 높이의 길이가 각각 8, 6, 10 인 직육면체의 꼭지점 E 에서 대각선 $\overline{AG}$ 에 내린 수선의 발을 I라고 할 때, $\overline{EI}$ 의 값은 얼마인가?(kmc 3회 고1)



풀이 답: $5\sqrt{2}$

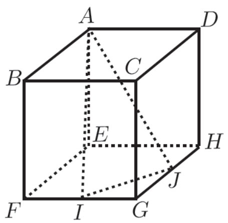
$\overline{EG}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ 이고, $\overline{AG}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$ 이다.

$\triangle AEG$의 넓이는 두 가지 방법 $\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{EG}=\frac{1}{2}\times\overline{AG}\times\overline{EI}$, $\frac{1}{2}\times10\times10=\frac{1}{2}\times10\sqrt{2}\times\overline{EI}$

$\overline{EI}=5\sqrt{2}$ 이다.

유제 6

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2 인 정육면체 $ABCD$-$EFGH$ 의 두 모서리 $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ 의 중점을 각각 I, J라 하자. 꼭지점E 에서 삼각형 AIJ까지 최단 거리를 구하여라.(kmc 6회 고2)



7 도전예제

원리탐구

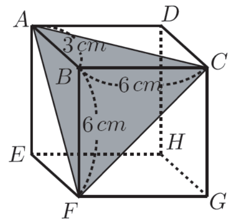
그림과 같이 $\overline{AB}=3cm$, $\overline{BC}=6cm$, $\overline{BF}=6cm$ 인 직육면체를 꼭지점 A, F, C를 지나는 평면으로 자를 때, 다음을 구하여라.

(1) $\triangle AFC$ 의 넓이

(2) 사면체 $B-AFC$의 부피

(3) 사면체 $B-AFC$의 꼭지점 B에서 단면 $\triangle AFC$에 내린 수선의 길이

(4) 꼭지점 H에서 단면 $\triangle AFC$에 내린 수선의 길이



풀이 답: (1) $9\sqrt{6}(cm^2)$

(1) $\triangle AFC$에서 $\overline{AC}=\overline{AF}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$이고, $\overline{FC}=6\sqrt{2}$이므로 점 A에서 $\overline{FC}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\triangle AFC$는 이등변삼각형이므로 $\overline{FM}=\overline{CM}$ 이다. 따라서 $\overline{AM}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{3}$ 이다. $\therefore$ ($\triangle AFC$의 넓이)$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\sqrt{3}=9\sqrt{6}(cm^2)$

(2) $B-AFC$의 부피는 $\triangle BFC$를 밑변으로 하고 $\overline{AB}$ 를 높이로 하는 삼각뿔이다.

$V=\frac{1}{3}\triangle BFC\times3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times3=18(cm^3)$

(3) 구하는 수선의 길이를 h라 하면 삼각뿔 $B-AFC$의 부피는 다음과 같다.

$V=\frac{1}{3}\triangle AFC\times h=\frac{1}{3}\triangle BFC\times\overline{AB}$, $\frac{1}{3}\times9\sqrt{6}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times3$ $\therefore$

$h=\frac{54}{9\sqrt{6}}=\sqrt{6}(cm)$

(4) 구하는 수선의 길이를 $h\,cm$라 하면 $\triangle AFC=9\sqrt{6}(cm^2)$이므로

(삼각뿔 $H-ACF$의 부피)$=\frac{1}{3}\times9\sqrt{6}\times h=3\sqrt{6}h(cm^3)\cdots$ ㉠

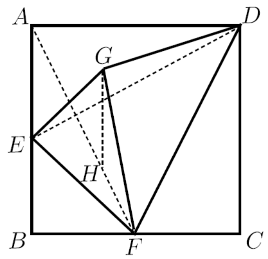
그런데 삼각뿔 $H-ACF$의 부피는 직육면체의 부피에서 삼각뿔 $B-ACF$, $D-ACH$, $G-CFH$, $E-AFH$의 부피를 빼면 된다. 이 네 삼각뿔의 부피는 모두 $18cm^3$이다.

$\therefore$ (삼각뿔 $H-ACF$의 부피)$=3\times6\times6-18\times4=36(cm^3)\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $3\sqrt{6}h=36$, $\therefore$ $h=2\sqrt{6}(cm)$

유제 7

한 변이 $8cm$ 인 정사각형 $ABCD$ 의 세 모서리를 접어 사면체 $G-DEF$ 를 만들었다. 점 E 는 $\overline{AB}$ 위에, 점 F 는 $\overline{BC}$ 위에 잡고 꼭지점 G 에서 밑면 DEF 에 수선을 그어 점을 H 라 한다. 수선의 발 H 는 $\overline{AF}$ 위에 있다. 이 때 $\overline{GH}$ 의 길이를 구하여라.



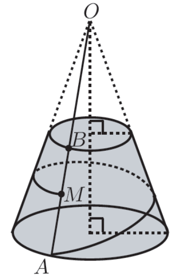
8 도전예제

원리탐구

그림과 같은 원뿔대가 있다. 이 원뿔대의 윗면과 모선 OA 와의 교점을 B 라고하자. 실을 점 A 에서 $\overline{AB}$ 의 중점 M 까지 가장 짧게 한 바퀴 감았을 때, 다음을 구하여라.(단, $\overline{AB}=20cm$, 원뿔대의 윗면의 반지름은 $5\,cm$, 밑면의 반지름은 $10\,cm$ 이다.)

(1) 원뿔대의 전개도를 그려라.　　(2) 실의 길이

(3) 윗면의 원둘레 위의 점과 실위의 점 사이의 거리 중 최단거리



풀이　**답: (1) 그림참조　(2) $50(cm)$　(3) $4(cm)$**

(1) 원뿔대의 전개도는 그림과 같다.

(2) 원뿔대의 윗면과 밑면의 반지름의 길이의 비가 $5:10=1:2$ 이므로

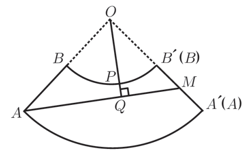
$\overline{AO}:\overline{BO}=2:1$ **즉, 점 B 는 $\overline{AO}$ 의 중점이다.**

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{BO}=20(cm)$

또, 윗면의 반지름의 길이가 $5\,cm$ 이므로 $\widehat{BB'}=2\pi\times5=10\pi(cm)$

중심이 O 이고 반지름이 $\overline{BO}$ 인 원의 둘레의 길이는 $40\pi\,cm$ 이므로

$\angle BOB'=\dfrac{10\pi}{40\pi}\times360°=90°$ **이다.**



따라서 $\triangle AOM$ 은 직각삼각형이므로 $\overline{AM}=\sqrt{40^2+30^2}=50(cm)$ 이다.

(3) $\triangle AOM$ 의 넓이에서 $\overline{AO}\cdot\overline{OM}=\overline{AM}\cdot\overline{OQ}$ 이므로 $40\times30=50\times\overline{OQ}$ $\therefore\ \overline{OQ}=24(cm)$

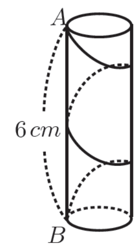
그러므로 구하는 최단거리는 $\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=\overline{OQ}-\overline{OB}=24-20=4(cm)$ 이다.

유제 8

그림과 같이 높이가 $6cm$ 인 직원기둥의 점 A 에서 B 까지 최단거리로 실을 두 바퀴 감았더니 실의 길이가 $10cm$ 이었다. 다음을 구하여라.

(1) 전개도에 최단거리의 실의 길이를 그려라.

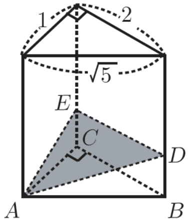
(2) 원기둥의 반지름



9 도전예제

원리탐구

그림은 직각삼각형 ABC가 밑면인 삼각기둥이다. $\triangle ADE$가 정삼각형일 때, $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BD}}$ 를 구하여라.(kmc 5회 고1)



풀이 답: $\dfrac{4+\sqrt{13}}{3}$

$\overline{BD}=x$, $\overline{CE}=y$ 라 하면 $\overline{AE}^2=y^2+1\cdots$ ①, $\overline{AD}^2=x^2+5\cdots$ ②

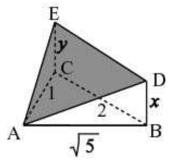
$\overline{DE}^2=(y-x)^2+4$ $\cdots$ ③

$\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EA}$이므로 ①, ②에 의하여 $y^2-x^2=4\cdots$ ④

또, ②, ③에 의하여 $y^2-2xy=1$ $\cdots$ ⑤

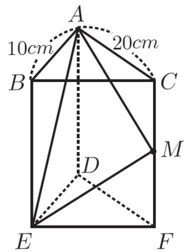
④, ⑤에서 상수항을 소거하면 $3y^2-8xy+x^2=0$

④에 의하여 $y>x$ $\therefore$ $y=\dfrac{4+\sqrt{13}}{3}x$, $\dfrac{y}{x}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BD}}=\dfrac{4+\sqrt{13}}{3}$



유제 9

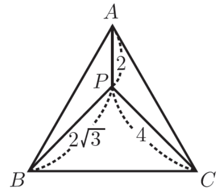
그림과 같은 삼각기둥 $ABC-DEF$에서 점 M은 모서리 CF의 중점이고 삼각형 AEM은 정삼각형이다. 삼각기둥의 부피를 구하여라.(kmc 7회 고1)



10 도전예제

원리탐구

정삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에서 꼭지점 A, B, C까지 거리가 각각 2, $2\sqrt{3}$, 4일 때, 정삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.



풀이 답: $7\sqrt{3}$

$\triangle BPC$를 점 C를 중심으로 시계방향으로 60° 회전 이동하여 그림과 같이 $\triangle AQC$를 만들자. $\angle PCQ=60^\circ$이고, $\overline{CP}=\overline{CQ}=4$이므로 $\triangle CPQ$는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

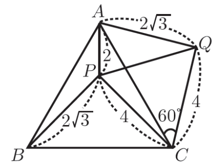
따라서 $\overline{PQ}=4$이고, $\angle CQP=60^\circ$이다.

또, $\overline{AP}:\overline{AQ}:\overline{PQ}=2:2\sqrt{3}:4=1:\sqrt{3}:2$이므로 $\triangle APQ$는 직각삼각형이다. 즉, $\angle PAQ=90^\circ$이고, $\angle AQP=30^\circ$이므로

$\angle AQC=\angle AQP+\angle AQP=30^\circ+60^\circ=90^\circ$

즉, $\triangle AQC$는 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$ 이다.



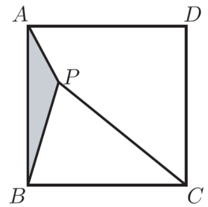
그러므로 $\triangle ABC$의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{7})^2=7\sqrt{3}$ 이다.

유제 10

P는 정사각형 $ABCD$ 내의 한 점이다. $\overline{PA}=1$, $\overline{PB}=2$, $\overline{PC}=3$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\angle APB$

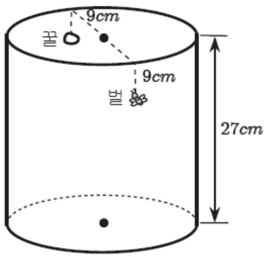
(2) 정사각형의 한 변의 길이



종합문제 B

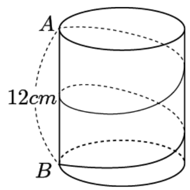
1. 원기둥의 높이는 $27cm$ 이고 원둘레는 $48cm$ 인 투명한 원기둥 안쪽 벽에 입구에서부터 $9cm$ 떨어진 곳에 꿀을 묻혀 놓았다. 반대편 유리 벽 바깥쪽 같은 지점에서 벌 한 마리가 앉아 있다. 벌이 가장 짧은 거리를 기여서 꿀이 묻어 있는 곳까지 갈 수 있는 길을 작도하고 길이를 구하여라.($\angle A=90^\circ$, $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$의 관계가 성립한다.) (단, 원기둥의 두께는 생각하지 않는다.)

(1) 작도

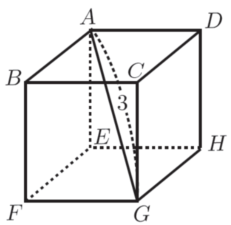


(2) 길이

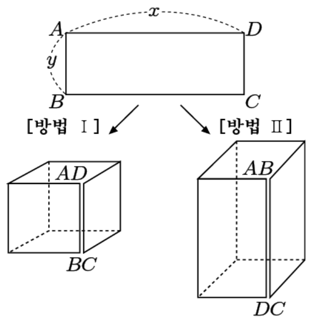
2. 그림과 같이 높이가 $12\,cm$ 인 원기둥의 점 A 에서 옆면을 따라 점 B까지 실을 두 바퀴 감을 때, 필요한 실의 최소 길이가 $20\,cm$ 라고 한다. 이 때, 이 원기둥의 밑면의 넓이를 구하여라.



3. 그림과 같은 정육면체에서 대각선 AG의 길이가 3이다. 이 정육면체의 겉넓이를 구하여라.



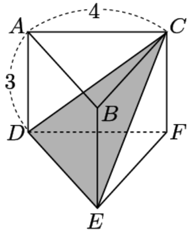
4. 가로, 세로의 길이가 각각 x, y 인 직사각형 모양의 종이를 적당히 접어서 이것을 옆면으로 하는 정 n각기둥을 만드는 방법은 2가지가 있다. 오른쪽 그림이 $n=4$ 인 경우를 보여준 것이라면 $n=6$ 일 때, [방법Ⅰ]과 [방법Ⅱ]로 생기는 입체도형의 부피의 비를 구하여라.



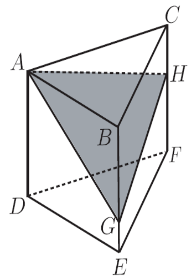
5. 공을 띄어 놓은 호수가 얼었다. 얼음을 깨지 않고 공을 들어내었더니 윗면의 지름이 $24cm$이고 깊이가 $8cm$인 구멍이 생겼을 때, 이 공의 반지름의 길이를 구하여라.

6. 어느 건물의 옥상은 두 변의 길이가 $40m$와 $60m$인 직사각형 모양이다. 이 건물의 옥상에 피뢰침을 세우기 위하여 옥상의 한 가운데에 길이가 $2m$인 막대를 세우고, 옥상의 네 꼭지점에서 각각 이 막대의 꼭대기까지 줄을 연결하여 막대가 흔들리지 않도록 하려고 한다. 한 꼭지점에서 이 막대의 꼭대기까지 연결된 줄의 길이를 구하여라.

7. 그림과 같이 한 변의 길이가 4 인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 3 인 정삼각기둥을 점 C, D, E 를 지나는 평면으로 자르려고 한다. 이 때, 꼭짓점 F에서 이평면까지 거리를 구하여라.



8. 그림과 같은 정삼각기둥에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=4cm$, $\overline{AD}=5cm$, $\overline{GE}=1cm$, $\overline{HF}=3cm$ 일 때, $\triangle AGH$의 넓이를 구하여라.



9. 좌표평면 위의 세 점 $A(2,1), B(5,2), C(4,7)$ 에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 이 최소가 되는 점 $P(a, b)$ 를 구하여라.(kmc 중3, 4회)

10. 세 변의 길이가 a, b, c 이고 $a<b<c=20$인 둔각삼각형 중 a의 최대값을 구하고, 이 때의 b의 값을 구하여라. (단, a, b는 자연수이다.)

11. 둘레의 길이가 8이고, 각 변의 길이가 모두 자연수인 삼각형의 넓이를 구하여라.

12. 피보나치 수와 피타고라스 정리가 아무런 관련이 없어 보인다. 서로 독립적으로 발견된 것으로써 연결고리가 생각나지 않는다. 그런데 놀랍게도, 피보나치 수들을 가지고 피타고라스 짝을 만들 수가 있다. 피타고라스 짝을 만들기 위해 임의의 연이어진 네 개의 피보나치 수, 예를 들어 $3, 5, 8, 13$에서 다음 규칙을 찾을 수 있다.

|규칙|

① 중간의 두 수를 곱하고 다시 2를 곱한다. 위의 예에서는 5와 8을 곱해 40을 얻고 다시 2배하여 80을 얻는다.

② 바깥의 두 수를 곱한다. 3과 13을 곱하여 39을 얻는다.

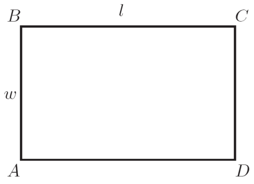
③ 중간의 두 수의 제곱해 합을 구한다. $5^2+8^2=25+64=89$이다.

구해진 피타고라스 짝 $39, 80, 89$에서 $39^2+80^2=1,521+6,400=7,921=89^2$이므로 피타고라스 짝이 맞다. 연이어진 피보나치 수를 a, b, c, d 하면 $c=a+b$이고, $d=c+b=a+b+b=a+2b$이다. 즉, $a, b, a+b, a+2b$가 연이어진 4개의 피보나치 수가 된다. 이 피보나치 수에서 피타고라스 짝 만드는 방법의 증명에서 물음에 답하여라.

(1) 규칙 ①, ②, ③에서 만들어진 수를 각각 A, B, C라고 할 때, 이것을 a, b에 관한 식으로 표현하여라.

(2) 이 세 수A, B, C가 피타고라스 짝이 되어 피타고라스 정리를 만족하는지 증명하여라.

13. (그림1)의 가로가 l이고 세로가 w인 직사각형을 생각하자. 가로와 세로는 $\frac{w}{l}=\frac{l}{w+l}$와 같은 관계가 있다고 하자.



(그림1)

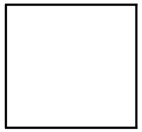
위의 비례식을 풀면 $w(w+l)=l^2$을 얻고 $w^2+wl-l^2=0$이 된다. $l=1$이라 하면, $w^2+w-1=0$이 된다.

2차방정식의 근의 공식을 사용하여 $w=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$를 얻는데, 길이는 항상 양수라는 조건 때문에 음수인 w는 생각하지 않는다.

따라서 $w=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{\varnothing}$를 얻고 황금비율의 역수임을 알 수 있다.

그러므로 황금 직사각형의 가로 세로 비율은 $\frac{w}{l}=\frac{l}{w+l}=\frac{1}{\varnothing}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 또는

$\frac{l}{w}=\frac{w+l}{l}=\varnothing=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$이다. 다음 정사각형을 이용하여 황금 직사각형을 작도하여라.

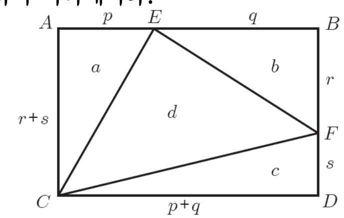


14. 어떤 직육면체의 각 모서리의 길이의 합은 76 이고 겉넓이는 192 이다. 이 직육면체의 대각선의 길이는 얼마인가?(kmc 1회 고1)

15. 한 모서리의 길이가 $6\,cm$ 인 정사면체에 내접하는 구의 부피를 구하여라.

16. (헌터$_{J.A.H Hunter}$가 제안한 문제) 임의의 직사각형 $ABCD$의 두 변에 점을 찍어 삼각형 네 개를 만들었다. 이 중 가운데 삼각형$\triangle CEF$을 제외하고, 나머지 세 삼각형의 넓이가 같게 하는 길이의 비 $\frac{r}{s}\left(=\frac{q}{p}\right)$를 구하는 과정이다. 다음 물음에 답하여라.

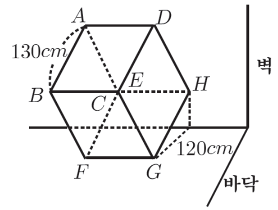
(1) $\triangle ACE, \triangle BEF, \triangle CDF$의 넓이를 p, q, r, s 를 사용하여 나타내어라.



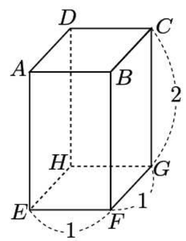
(2) $\triangle ACE=\triangle BEF, \triangle ACE=\triangle CDF$을 이용하여 p, pr을 구하여라.

(3) 위의 식을 이용하여 $\frac{r}{s}$를 구하여라.

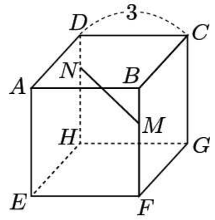
17. 그림과 같이, 한 모서리의 길이가 $130cm$인 정육면체 모양의 상자를 벽과 바닥에 비스듬히 기대어 놓았다. 선분 FG는 바닥에 닿아 있고, 선분 EH는 벽에 닿아 있다. 점 G에서 벽까지의 거리가 $120cm$일 때, 점 D에서 바닥까지의 거리는 몇 cm인가?(kmc 5회 고1)



18. 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형을 밑면으로 하고 높이가 2 인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 꼭짓점 중 세 점을 골라 삼각형을 만들 때, 가장 긴 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 삼각형은 몇 가지 만들 수 있는가?

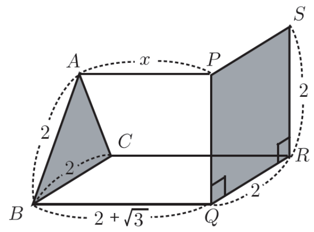


19. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3 인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 $\overline{BF}$, $\overline{DH}$ 를 $1:2$ 로 나누는 점을 각각 M, N 이라 한다. 이 정육면체를 세 점 E, M, N 을 포함하는 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면의 둘레의 길이를 구하여라.

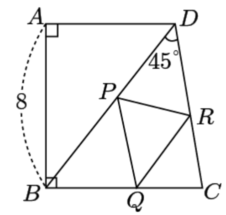


도전문제 B

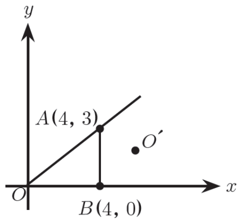
1. 가로, 세로의 길이가 각각 $2+\sqrt{3}$, 2인 직사각형 $BQRC$의 두 변에 오른쪽 그림과 같이 정삼각형 ABC와 정사각형 $PQRS$를 수직으로 세웠을 대, 선분 AP의 길이를 구하여라.



2. 그림과 같이 $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$ 이고 $\overline{AB}=8$ 인 $\square ABCD$ 에서 $\angle BDC=45^\circ$ 일 때, $\triangle BCD$ 에 내접하는 삼각형 PQR 의 둘레의 길이의 최솟값을 구하여라.
(단, $0^\circ<\angle C<90^\circ$)



3. 그림과 같이 $\angle AOB$의 내부에 $\triangle AOB$의 방심 O'가 있다. 선분 AO'의 연장선이 x축과 만나는 점을 P라고 할 때, $\triangle O'BP$를 x축을 중심으로 360° 회전시킨 입체도형의 겉넓이를 구하여라.



4. 천여 년 전 이집트의 피라미드를 만들 때 이미 사용되었던 고대의 방법은 모든 직각삼각형의 변의 길이의 비가 $3:4:5$를 이룬다는 유명한 피타고라스의 정리를 바탕에 두고 있다. 수 $3,\ 4,\ 5$ 외에도 무한한 양의 정수 $a,\ b,\ c$도 다음 관계를 성립시킨다.

$a^2+b^2=c^2$(단, $a,\ b,\ c$는 1이외의 공약수를 가지지 않는다.)

이들을 피타고라스의 수라고 하며, 다음 형태를 갖는다.

$a=mn,\ b=\dfrac{m^2-n^2}{2},\ c=\dfrac{m^2+n^2}{2}$(단, $m,\ n$은 서로소인 홀수이다.)

위의 형태를 증명하는 과정이다. 다음 물음에 답하여라.

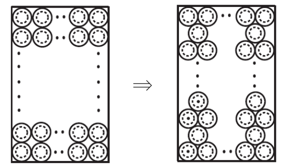
(1) 세 수 $a,\ b,\ c$에서 빗변 c를 제외한 두 변 중 하나는 짝수이어야 하고, 다른 하나는 홀수이어야 함을 역 추론을 이용하여 증명하여라.

(2) 빗변 c를 제외한 두 변 $a,\ b$에서 a가 홀수이고, b는 짝수라고 가정하면, 등식 $a^2+b^2=c^2$, $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$에서 우변 $c+b$와 $c-b$는 서로소임을 증명하여라.

(3) 서로소인 수의 곱이 어떤 수의 제곱이면, 그 수 각각은 또 다른 어떤 수들의 제곱이 된다. 즉 $c+b=m^2$, $c-b=n^2$이다. 이것을 이용하여 a, b, c를 $m,\ n$을 사용하여 써라.

5. (그림1)과 같이 포도주 병을 직사각형상자의 가로세로에 꼭 맞도록 배열하였더니 가득차고 하나가 남았다. (그림2)와 같이 남은 하나를 더 넣기 위해서 두 줄에 한 병씩 적게 배열하고 전 줄에 비하여 반 병 만큼 밀리도록 배열하였더니, 한 줄이 더 생겨서 한 병이 더 들어갔다. 한 병이 더 들어가도록 담은 최소한의 포도주병상자의 크기를 구하는 과정이다. 다음을 구하여라.(단, 포도주 상자 속에는 가로 n병의 포도주가, 세로 줄에 m병의 포도주가 세워져 있고, 포도주 병의 지름을 d라 하자.)

(1) m의 범위와 정수값

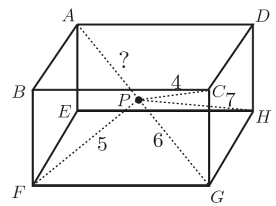


(그림1) (그림2)

(2) n의 범위와 정수값

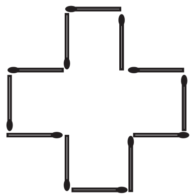
(3) 최소한의 포도주병상자의 크기

6. 직육면체 $ABCD-EFGH$의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{PC}=4,\ \overline{PF}=5,\ \overline{PG}=6$, $\overline{PH}=7$이라 할 때, 선분 $\overline{PA}$의 길이는?(17회 KMO)



[사고력 퀴즈와 퍼즐]

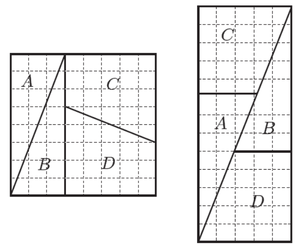
1. 12개의 성냥개비를 가지고 그림과 같이 십자가를 만들 수 있다. 그 면적은 정확하게 성냥개비 하나를 한 변으로 하는 정사각형 5개의 면적과 같다. 성냥의 위치를 바꾸어서 그 넓이가 성냥개비 하나를 한 변으로 하는 정사각형 4개의 면적과 같게 만들어라. 단, 측량 도구를 사용해서는 안 된다.



[생활 속의 수학]

1. 착시와 피보나치수열 및 황금비

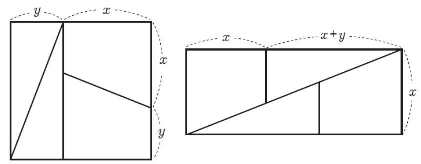
다음의 두 개의 사각형을 보자. 두 사각형은 인간의 눈이 정교하지 않다는 걸 용한 속임수다. 그림을 보면 왼쪽 사각형의 A, B, C, D하고 오른쪽의 A, B, C, D가 같아 보이지만, 사실을 다른 것이다. 눈으로 보기에는 같아 보이지만, 정교하게 약간씩 다르다. 그래서 두 사각형의 면적에 차이가 생긴 것이다. 즉, [그림1]은 $8\times8=64$이고, [그림2]은 $5\times13=65$ 이다.



[그림1] [그림2]

앞의 착시를 일으키는 사각형의 일반적인 모습을 그려보면 [그림3]과 [그림4]와 같다.

그림 속의 x, y의 길이에 피보나치수열에 나오는 숫자들을 넣으면 착시가 완성된다. x, y에 큰 숫자를 넣을수록 착시가 더 정교해진다. 만약 [그림3]과 [그림4]의 넓이가 착시가 아닌 정확히 같으려면 $y=1$일 때, x는 얼마인가?



[그림3] [그림4]

[읽을거리]

1. 종이를 접어 정오각형 만들기

이 문제를 푸는 가장 간단한 방법은 종이를 직접 접어 정오각형을 만들어 보는 것이다. 이것을 펼쳐 보면 기다란 평행사변형이 나오고 이는 서로 접한 4개의 등변사다리꼴로 나누어진다.

그런데 이 등변사다리꼴을 접으면 정오각형이 나오므로, 그림처럼 등변사다리꼴의 윗변과 두 빗변은 길이가 같고, 등변사다리꼴의 둔각 ϕ는 정오각형의 한 내각과 같은 108°가 되며, 사각형의 내각의 합은 360° 이므로 등변사다리꼴의 예각 ϕ는 72°이다. 다음으로 사다리꼴의 높이(h)는 종이 띠의 폭인 $3cm$이다.

따라서 윗변의 길이는 $a=\dfrac{h}{\sin\psi}\fallingdotseq 3.154cm$ $b=\dfrac{h}{\tan\psi}=0.975\,cm$이다.

이로써 종이 띠의 짧은 변의 길이는 $a\fallingdotseq 3.154cm$, 긴 변의 길이는 $4a+4b\fallingdotseq 16.52\,cm$임을 알 수 있다.