100 문제를 푸는 것보다 문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

원리탐구 중등수학

중3 수학(상)

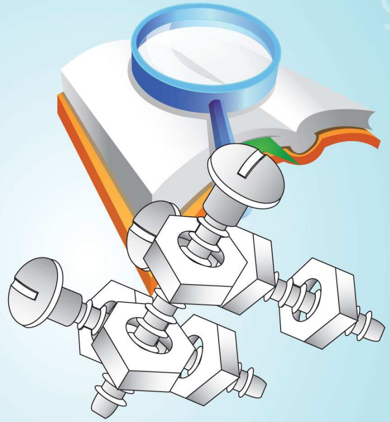
최상위권 학생을 위한 고난이도 문제 **도/전/편**

The discovery of dharma Series Challenge

최 경호 지음

홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이

MATHEMATICS



원리탐구

중3수학(상) 도전 차례

제 1강	제곱근과 실수	3
제 2강	근호를 포함한 식의 계산	25
제 3강	인수분해	47
제 4강	이차방정식	77
제 5강	이차방정식의 활용	101
제 6강	이차함수와 그래프	125
제 7강	이차함수의 성질	147

	생활 속의 수학	읽을거리
제 1강	1. 고대 바빌로니아의 수 표기	1. $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아닌 이유
제 2강	1. 무리수의 발견	1. 원주율 π
제 3강	1. ‘0’은 어떤 역할을 하는 수인가?	1. 골드바흐의 추측
제 4강	1. 화투장의 수	1. 방정식의 일반적인 해법
제 5강	1. 착시와 피보나치수열 및 황금비	1. 장난꾸러기 아벨
제 6강	1. 엔진의 힘 마력	1. 자동차의 안전거리
제 7강	1. 사람에게는 얼마만큼의 땅이 필요한가?	1. 포물선을 그리며 이동하는 태풍

제 1강 제곱근과 실수

1 도전예제

원리탐구

$\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명하여라.

풀이 답: 풀이참조

(해1) $\sqrt{2}$ 를 유리수 즉, $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ (p, q 는 서로소인 자연수)라 하자.

양변을 제곱하면 $2=\frac{p^2}{q^2}$ 이고, $2q^2=p^2$ 이다.

(ⅰ) p가 홀수이면 p^2도 홀수이다. 좌변이 짝수이므로 홀수와 짝수가 같을 수 없으므로 모순이다.

(ⅱ) 좌변이 2의 배수이므로 p^2도 2의 배수이다. 따라서 p도 2의 배수가 된다. $p=2k$ (k는 자연수)라 하면 $2q^2=(2k)^2$ 에서 $2q^2=4k^2$ 이므로 $q^2=2k^2$ 가 되어 q도 2의 배수가 된다.

따라서 p 와 q 는 서로소라는 가정에 모순이 된다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\sqrt{2}$ 는 무리수이다.

(참고) 이와 같이 $\sqrt{2}$를 유리수라고 가정하면 모순이 생김을 보임으로써 $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명하는 방법을 귀류법이라 한다.

(해2) 제1강 읽을거리 참조

유제 1

(예제1)번을 이용($\sqrt{2}$ 가 무리수임)하여 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명하여라.

2 도전예제

원리탐구

다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{319-22x}$ 이 자연수가 되기 위한 자연수 x 의 값

(2) $\sqrt{333\times a}$ 가 자연수가 되도록 하는 a 의 값 중에서 가장 작은 세 자리의 자연수와 가장 큰 세 자리의 자연수

풀이 답: (1) 9 (2) 148, 925

(1) $\sqrt{319-22x}$ 이 자연수가 되려면 $319-22x$ 가 완전제곱수가 되어야 한다. 즉, $319-22x=a^2$ (a 는 자연수) $\therefore$ $11(29-2x)=a^2\cdots$ ①

①에서 $29-2x$ 는 $11\times$(자연수)^{2}인 꼴의 수가 되어야 한다.

$29-2x=11\times1^2$, $x=9$

$29-2x=11\times2^2$ 은 x가 음수가 되므로 성립하지 않는다.

따라서 구하는 양의 정수 x 는 9 이다.

(2) $\sqrt{333\times a}=3\sqrt{37a}$ 가 자연수가 되려면 a 는 $37\times n^2$ (n 은 자연수)의 꼴이어야 한다.

$37\times2^2=148$, $37\times3^2=333$, $37\times4^2=592$, $37\times5^2=925$, $37\times6^2=1332$ 이다.

따라서 가장 작은 세 자리의 자연수 a 는 148 이고, 가장 큰 세 자리의 자연수 a 는 925 이다.

유제 2

다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{217-21x}$ 이 자연수가 되기 위한 자연수 x 의 값

(2) $\sqrt{60\times a}$ 가 자연수가 되도록 하는 a 의 값 중에서 가장 작은 세 자리의 자연수와 가장 큰 세 자리의 자연수

3 도전예제

원리탐구

다음을 구하여라.

(1) $\sqrt{3}$ 의 소수부분을 a 라 할 때, $5-\sqrt{3}$ 의 소수부분을 a 로 나타내어라.

(2) $\sqrt{11x}$ 의 정수부분이 9 일 때, 정수 x 의 값

풀이 답: (1) $1-a$ (2) $8, 9$

(1) $1<\sqrt{3}<2$ 이므로 소수부분 $a=\sqrt{3}-1$, $\sqrt{3}=a+1$ 이다.

$-2<-\sqrt{3}<-1$, $3<5-\sqrt{3}<4$ 이므로 $5-\sqrt{3}$ 의 소수 부분은

$(5-\sqrt{3})-3=2-\sqrt{3}=2-(a+1)=1-a$ 이다.

(2) $\sqrt{11x}$ 의 정수부분이 9 이므로 $9\le\sqrt{11x}<10$, $81\le 11x<100$, $\frac{81}{11}\le x<\frac{100}{11}$,

$7\frac{4}{11}\le x<9\frac{1}{11}$ 이다. $\therefore\ x=8, 9$

유제 3

다음을 구하여라.

(1) 실수 $4-\sqrt{3}$ 의 정수부분을 a , 소수부분을 b 라 할 때, $\frac{1}{b}+\frac{1}{2a-b}$ 의 값

(2) 무리수 $6-\sqrt{5}$ 의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b 라 할 때, $\frac{a+1}{2a-b}+\frac{a+1}{b}$ 의 값

4 도전예제

원리탐구

$ab=3$ 일 때, $a\sqrt{\frac{243b}{a}}-b\sqrt{\frac{27a}{b}}$ 의 값을 구하여라.(단, $a<0, b<0$)

풀이 답: -18

$a<0, b<0$ 일 때 $a=-\sqrt{a^2}$ 이고, $b=-\sqrt{b^2}$ 임에 주의한다.

(준 식) $=-\sqrt{a^2\cdot\frac{243b}{a}}+\sqrt{b^2\cdot\frac{27a}{b}}=-\sqrt{243ab}+\sqrt{27ab}=-\sqrt{729}+\sqrt{81}=-27+9=-18$

유제 4

$ab=2$ 일 때, $a\sqrt{\frac{2b}{a}}+b\sqrt{\frac{32}{ab^3}}$ 의 값을 구하여라.(단, $a<0, b<0$)

5 도전예제

원리탐구

다음을 만족하는 유리수 x, y 를 구하여라.

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})x = 2\sqrt{2}-(y+1)\sqrt{3}$ (2) $\dfrac{x}{\sqrt{2}+1}+(\sqrt{2}+1)y = \sqrt{(2\sqrt{2}-4)^2}$

풀이 답: (1) $x=2, y=-3$ (2) $x=-3,\ y=1$

(1) x, y 가 유리수이므로 무리수 상등의 원리에 의하여 다음과 같다.

$x\sqrt{2}+x\sqrt{3} = 2\sqrt{2}-(y+1)\sqrt{3}$, $(x-2)\sqrt{2}+(x+y+1)\sqrt{3} = 0$, $x=2, y=-3$

(2) $x(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)y = 4-2\sqrt{2}$, $-x+y+(x+y)\sqrt{2} = 4-2\sqrt{2}$

$-x+y=4$, $x+y=-2$ 를 연립방정식을 이용하여 풀면 $x=-3, y=1$ 이다.

유제 5

$\sqrt{5}$ 의 소수 부분을 a 라 하고 a 의 역수의 소수 부분을 b 라 할 때,
방정식 $(a+3)x-by-6=0$ 을 만족시키는 유리수 x, y 를 구하여라.

6 도전예제

원리탐구

다음 수의 대소를 비교하여라.

(1) 1 , $\sqrt{29}-\sqrt{21}$ (2) 1 , $\dfrac{6}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$

풀이 답: (1) $\sqrt{29}-\sqrt{21}<1$ (2) $\dfrac{6}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}>1$

(1) $\sqrt{29}-\sqrt{21} = \dfrac{8}{\sqrt{29}+\sqrt{21}} < \dfrac{8}{5+4} < 1$ 이므로 $\sqrt{29}-\sqrt{21}<1$ 이다.

(2) $(\sqrt{11}+\sqrt{7})^2 = 18+2\sqrt{77} < 18+2\times 9 = 36$ 이므로 $\sqrt{11}+\sqrt{7}<6$ 이다.

따라서 $\dfrac{6}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}>1$ 이다.

유제 6

두 수 $\sqrt{1006}-\sqrt{1005}$ 와 $\sqrt{1004}-\sqrt{1003}$ 의 대소를 비교하여라.

종합문제

1. 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{\dfrac{32^4+4^5}{8^2+4^8}}$

(2) 실수 a, b 에 대하여 $a>b$, $ab<0$ 일 때, $(\sqrt{a})^2+|b|-\sqrt{(-2a)^2}+\sqrt{b^2}$

2. 300 이하의 자연수 n 중에서 $\sqrt{12n}$ 이 자연수가 되는 n 은 모두 몇 개인가?

3. 다음 부등식을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.

(1) $\dfrac{1}{100}<\dfrac{1}{\sqrt{5x}}<\dfrac{1}{50}$

(2) $-4.8<-\sqrt{x}\leq-3.2$

4. 다음 두 식의 값이 모두 양의 정수가 되게 하고, 또 두 값의 합이 최소가 되도록 만드는 자연수 n 의 값은 얼마인가?

$\dfrac{600}{n}$, $\sqrt{216\times n}$

5. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n^2+1}$ 의 소수 부분을 a_n 이라 할 때, $(a_{2015}+2015)^2$ 의 일의 자리의 수를 구하여라.

6. $(2\sqrt{7}+\sqrt{29})^{29}=a$ 일 때, $(2\sqrt{7}-\sqrt{29})^{29}$ 을 a 를 써서 나타내어라.

7. $0<x<y$일 때, $\sqrt{500}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$은 만족하는 정수 x, y의 순서쌍 (x,y)의 개수를 구하여라.

8. $(2-\sqrt{3})^{929}$의 소수 부분을 x라 하고, $y=(2+\sqrt{3})^{929}$이라고 할 때, xy의 값을 구하여라.

9. n이 정수일 때, $n-1<\sqrt{x}<n+1$을 만족하는 정수 x가 39개 있다면, n의 값을 구하여라.

10. $x_1=\sqrt{3}$의 소수 부분을 y_1, $x_2=\dfrac{1}{y_1}$의 소수 부분을 y_2, $x_3=\dfrac{1}{y_2}$의 소수부분을 y_3이라고 한다. 이와 같은 방법을 계속하여 $y_4,\ y_5,\ y_6, \cdots$ 을 얻을 때, y_{929}의 값을 구하여라.

11. $\sqrt{7}$ 의 소수 부분을 p라 할 때, $\sqrt{175}$ 의 소수 부분을 p의 식으로 나타내어라.

12. 음의 정수 a에 대하여 다음 식의 값이 11 이하의 자연수가 될 수 있는 a의 값을 모두 구하여라.

$$\sqrt{\left(\frac{5}{11}a\right)^2}-\left(\sqrt{-\frac{3}{11}a}\right)^2$$

13. 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수를 각각 a와 b라 할 때, $\sqrt{20ab}$가 자연수가 될 확률을 구하여라.

14. 다음 식의 값이 자연수가 되는 자연수 k의 값을 모두 더하면 얼마인가?

$$\sqrt{2057-121k}$$

15. $9\sqrt{3}+2a-4-2\sqrt{3}a$가 유리수가 되도록 하는 유리수 a의 값을 구하여라.

16. $\sqrt{2}$가 무리수임을 이용하여 $3+\sqrt{2}$는 무리수임을 증명하여라.

17. $x=1-\sqrt{3}$, $y=1+\sqrt{3}$일 때, $y=ax+bx^2$을 만족하는 유리수 a, b를 구하여라.

18. $\sqrt{7}<x<\sqrt{500}$을 만족하는 정수 x중에서 $\sqrt{3x}$가 자연수가 되도록 하는 x값의 총합을 구하여라.

19. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 의 소수부분을 a 라고 할 때, $(a+3)^2=b+c\sqrt{6}$ 에서 b 의 값은 얼마인가? (단, b 와 c 는 유리수이다.)

20. 거리가 $\sqrt{x}\,(cm)$ 인 점의 눈금을 x 로 나타내는 자가 있다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 눈금이 81 인 점은 0 으로부터 몇 cm 떨어진 곳에 있는가?

(2) 눈금이 9 인 점을 A , 눈금이 36 인 점을 B 라 할 때, 다음을 구하여라.

① A 와 B 사이의 거리　　② A 와 B 사이의 거리를 $1:2$ 로 나누는 점 P 의 눈금

21. $x=2+\sqrt{2}$ 일 때, $\left[\dfrac{[2x]}{x-[x]}\right]$ 의 값은 얼마인가?(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

22. $\sqrt{51}$ 의 소수 부분을 a 라 할 때 $\dfrac{2}{a}-a$ 의 값은 얼마인가?

23. 자연수 n 에 대하여 부등식 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0.1$ 을 만족하는 n 의 최소값을 구하여라.

도전문제

1. $\sqrt{7 \cdot 3^k + 1}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 k 의 개수를 구하여라.

2. $\sqrt{[\sqrt{n}]} = \left[\sqrt{\sqrt{n}}\right]$ 을 만족시키는 두 자리 자연수 n 은 몇 개인가?(단, $[n]$ 은 n 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

3. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 보다 크고 $\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}$ 보다 작은 자연수는 모두 몇 개인가?

4. $\sqrt{111\cdots111-222\cdots222}$ 의 값을 구하여라.(단, 1 의 개수는 $2n$ 개이고, 2 의 개수는 n 개다.)

5. 일반적으로 연분수를 오른쪽과 같이 쓸 수 있다.

여기서 a_i는 실수이고, $i>0$에 대해 $a_i \neq 0$이다. 이것을 간단히, $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n]$이라 쓴다. 그러면 실제로 $\sqrt{2}$를 뜻하는 연분수를 만들어보자.

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}}\quad \ddots \quad \cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}$$

우선 $\sqrt{2}+2=\sqrt{2}+2$라는 등식에서 출발하여, 좌변을 곱의 형태로 쓰고 우변의 2를 쪼개서 쓰면,

$\sqrt{2}(1+\sqrt{2})=1+\sqrt{2}+1$을 얻는다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 양변을 $1+\sqrt{2}$로 나누어 연분수와 $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n]$으로 써라.

(2) 윗 식 풀이 우변의 $\sqrt{2}$ 대신 다시 $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$를 대입하여 연분수와 $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n]$으로 써라.

(3) 이런 식으로 계속 진행하여 마지막으로 만들어지는 식을 연분수와 $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n]$으로 써라.(단, $a.bbb\cdots=0.\bar{b}$로 표현한다.)

6. 5번의 방법으로 황금 비율$\varnothing$의 연분수와 $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n]$으로 써라.

(단, $\varnothing=1+\dfrac{1}{\varnothing}$이다.)

[사고력 퀴즈와 퍼즐]

1. 어린 왕자는 자기가 살던 소행성을 떠나, 왕이 사는 별, 지리학자가 사는 별, 사업가가 사는 별, 술꾼이 사는 별, 허영심이 많은 사람이 사는 별, 그리고 가로등을 켜는 사람이 사는 별을 방문한 후 일곱 번째로 지구에 오게 되었다. 어린 왕자는 처음 방문한 지구에 대하여 다음과 같이 말하였다.

지구는 지금까지의 별과는 달랐다. 지구에는 왕 111명과 지리학자 7000명, 사업가 90만 명, 술꾼 750만 명, 허영심 많은 사람 3억 1100만 명, 그리고 기타 모두 합하여 20억 정도 되는 사람들이 살고 있다. 전기가 발명되기 전까지 6대륙을 통틀어 46만 2511명이나 되는 가로등을 켜는 사람들을 두어야 했다는 이야기를 들으면, 지구가 얼마나 큰지 짐작이 갈 것이다. 재미있게 이야기를 하려다 보면 조금은 거짓말을 하는 수도 있다.

지구를 잘 알지 못하는 사람들에게 자칫하면 지구에 잘못된 상식을 갖게 할 수도 있을 것이다. 사람들은 지구에서 아주 작은 부분밖에 차지하지 못하고 있다.

지구에 사는 20억 명의 사람들이 서로 바짝바짝 붙어 서 있다면, 한 변의 길이가 $32\,km$인 정사각형 모양의 광장만으로도 충분할 것이다. 이는 태평양의 아주 작은 섬이면 되는 것이다. 물론 이런 말들을 어른들은 믿지 않을 것이다.

그들은 자신들이 자리를 많이 차지하고 있다고 생각하기 때문이다.

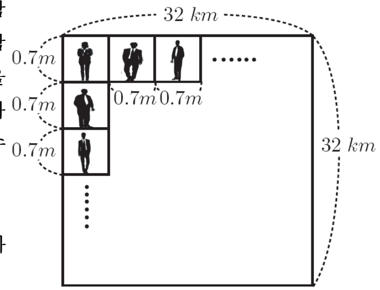
어린 왕자가 지구를 방문할 당시 지구의 인구는 20억 명 정도였던 모양이다. 어린 왕자가 말한 대로 20억 명의 사람을 정사각형 모양의 광장에 일정한 간격으로 줄을 세운다면, 한 줄에 몇 명의 사람이 들어갈지 계산하여 보자.

이것은 제곱하여 20억이 되는 값, 즉 20억의 양의 제곱근이다. 즉 $\sqrt{2\times10^9}$이다.

$\sqrt{2\times10^9}=10^4\times\sqrt{20}=2\times10^4\times\sqrt{5}$이고, 제곱근표를 이용하면 $\sqrt{5}\fallingdotseq 2.236$이므로

$\sqrt{2\times10^9}=44720$이다.

즉, 한 줄에 약 45000명이 줄을 서서 정사각형 모양으로 만들려면 20억 명 정도가 된다. 한 변의 길이 $32\,km$ 안에 약 45000명을 세우려면, 두 사람 사이의 간격이 $0.7\,m$ 정도가 된다. 다시 말해, 두 사람 사이의 간격을 $0.7\,m$로 하여 정사각형 모양으로 줄을 세운다면, 20억 명 정도의 인구는 한 변의 길이가 $32\,km$인 정사각형 모양의 광장 안에 모두 들어갈 수 있다.



현재 지구의 인구는 60억 명 정도가 된다고 한다.

60억 명 정도의 인구는 한 변의 길이가 몇km인 정사각형 모양의 광장 안에 모두 들어갈 수 있는가?

[생활 속의 수학]

1. 고대 바빌로니아의 수 표기

아래 사진은 지금으로부터 약 4000년 전의 것으로 추정되는 바빌로니아의 한 점토판으로 그 위에 한 변의 길이가 30인 정사각형과 그 대각선이 그려져 있고, 몇 개의 수가 고대 바빌로니아의 수 표기법으로 쓰여 있다.

이 점토판의 왼쪽 위에 있는 30은 정사각형의 한 변의 길이를 나타낸다. 가운데 줄의 1, 24, 51, 10과 그 아래의 42, 25, 35는 각각 무엇을 나타낼까?

고대 바빌로니아에서는 육십진법을 사용했다.

42, 25, 35는 $42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$를 뜻한다. 이 값을 계산하면 $42.426\cdots$으로, 정사각형의 대각선의 길이를 나타낸다.

한편, 1, 24, 51, 10은 $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$을 뜻한다. 이 값을 계산하면 $1.4142\cdots$로 $\sqrt{2}$에 가까운 값이다. 정사각형의 한 변의 길이 30에 $1.4142\cdots$를 곱하면 $42.426\cdots$이 된다.

아주 오래전에 인류가 $\sqrt{2}$의 근삿값을 상당히 정확하게 알고 있었다는 것이 참으로 놀랍다.

$\sqrt{2}$의 근삿값이 기록된 바빌로니아 점토판

[읽을거리]

1. $\sqrt{2}$가 유리수가 아닌 이유

분자, 분모($\neq 0$)가 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 한다. 유리수는 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있고, 거꾸로 유한소수나 순환소수는 분수로 나타낼 수 있다. 그런데 소수로 나타낼 때 순환하지 않는 무한소수가 되는 수가 존재하며, 우리는 그러한 수를 무리수라고 정의하였다. 결국 무리수는 분자, 분모($\neq 0$)가 정수인 분수로 나타낼 수 없는 수이다.

이제 $\sqrt{2}$가 유리수가 아닌 이유를 알아보자.

유리수는 2, 5나 $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$와 같이 정수 또는 분모가 1이 아닌 기약분수로 나타낼 수 있다.

$\sqrt{2}$가 정수도 아니고 분모가 1이 아닌 기약분수도 아님을 보이자.

(ⅰ) $1<\sqrt{2}<2$이므로 $\sqrt{2}$는 정수가 아니다.

(ⅱ) 분모가 1이 아닌 기약분수를 제곱하면 $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}, \left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$와 같이 역시 분모가 1이 아닌 기약분수가 된다. 그런데 $(\sqrt{2})^2=2$이므로, $\sqrt{2}$를 제곱하면 분모가 1이 아닌 기약분수가 되지 않는다. 그러므로 $\sqrt{2}$는 분모가 1이 아닌 기약분수도 아니다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)로부터 $\sqrt{2}$는 유리수가 아님을 알 수 있다. 즉, $\sqrt{2}$는 무리수이다.

같은 방법으로 $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \cdots$등도 유리수가 아님을 알 수 있다.