100 문제를 푸는 것보다 문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

원리탐구 중등수학

중2 수학(하)

최상위권 학생을 위한 고난이도 문제 **도/전/편**

The discovery of dharma Series Challenge

최 경호 지음

홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이

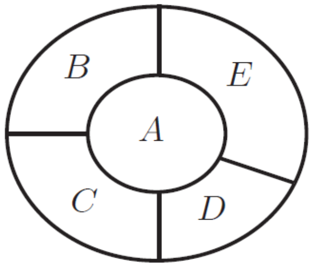
MATHEMATICS

원리탐구

중2수학(하) 도전 차례

생활 속의 수학		읽을거리
제 1강	1. 진열장 안에 진열된 정사면체는 모두 몇 개일까?	1. 하노이 탑과 지구의 종말
제 2강	1. 생일이 같은 사람이 있을 확률	1. 통계를 신뢰할 것인가?
제 3강	1. 브르타뉴의 해안선의 길이	1. 나폴레옹의 정리
제 4강	1. 파이와 와이가 살아서 움직일 수 있는 거리	1. 사각형의 변의 중점을 이으면 어떤 사각형이 될까?
제 5강	1. 닮음인 도형과 닮음이 아닌 도형	1. 자기 자신과 닮은 꼴 곡선_
제 6강	1. 크기가 다른 벌레가 같은 나무를 한 바퀴 돌 때, 느끼는 둘레와 넓이는 다르다.	1. 거대한 곤충의 습격은 가능한가?

제 1강 경우의 수



1 도전예제

원리탐구

a, b, c, d, e 를 한번 씩만 사용하여 사전식으로 5개의 문자를 배열할 때, 다음을 구하여라.

(1) 80번째 단어 **(2) $c\,d\,a\,b\,e$ 는 몇 번째**

풀이 답: (1) $dbaec$ (2) 61번째

(1) a를 앞에 썼을 경우: $4\times3\times2\times1=24$가지, b를 앞에 썼을 경우: $4\times3\times2\times1=24$가지,
c를 앞에 썼을 경우: $4\times3\times2\times1=24$가지, da를 앞에 썼을 경우: $3\times2\times1=6$가지이며, 여기까지는 $24\times3+6=78$번째이고 $dbace, dbaec$ 이다. $\therefore$ 80번째 단어는 $dbaec$이다.

(2) a를 앞에 썼을 경우 $4\times3\times2\times1=24$가지, b를 앞에 썼을 경우 $4\times3\times2\times1=24$가지,
ca를 앞에 썼을 경우 $3\times2\times1=6$가지, cb를 앞에 썼을 경우 $3\times2\times1=6$가지이다.
$24+24+6+6=60$이므로 바로 다음이 $c\,d\,a\,b\,e$이다. $\therefore$ 61번째이다.

유제 1

1, 2, 3, 4, 5다섯 개의 숫자를 모두 사용하여 다섯 자리의 정수를 만들어 작은 수부터 차례로 나열하려고 한다. 즉 12345, 12354, 12435, 12453, $\cdots$, 54321과 같이 차례로 나열하였을 때, 50번째 나타나는 수를 구하여라.

2 도전예제

원리탐구

수험생 5명의 수험표를 섞어서 임의로 1장씩 나누어 줄 때, 5명 중 어느 2명만이 자기 수험표를 받을 경우의 수를 구하여라.

풀이 답: 20(가지)

A, B, C, D, E의 5명과 이들의 수험표를 각각 a, b, c, d, e라 하고, 예를 들어 A, B만 자기 수험표를 받는다고 하면 수형도는 오른쪽과 같이 나타낼 수 있다. 5명 중 2명이 자기 수험표를 받는 경우의 수는 $5\times4\div2=10$(가지)이다. 그 각각의 경우에 따라 오른쪽 표와 같이 두 가지씩 존재한다. 따라서 모든 경우의 수는 $10\times2=20$(가지)이다.

A	B	C	D	E
a	b	d	e	c
		e	c	d

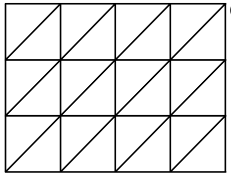
유제 2

약이 담겨있는 병 4개에 모두 상표가 붙어 있다. 다음의 경우의 수를 구하여라.

(1) 2개의 상표가 잘못 붙여질 경우의 수 **(2) 모두 상표가 잘못 붙여질 경우의 수**

3 도전예제

그림과 같은 4×3 정사각형으로 이루어진 직사각형의 도형을 삼각형으로 나눈 모양이다. 선을 따라 만들 수 있는 다음 도형을 구하여라.



(1) 직사각형의 개수

(2) 정사각형의 개수

(3) 직각삼각형의 개수

풀이 답: (1) 60 (2) 20 (3) 40

(1) 직사각형은 그림에서 세로 선분이 가로 선분만큼 (또는 가로 선분이 세로 선분만큼) 쌓여서 만들어지는 것이므로 가로의 선분과 세로의 선분이 연결되어야 한다. 그러므로 세로의 서로 다른 선분의 수와 가로의 서로 다른 선분의 수를 곱해준 것과 같다. 세로의 서로 다른 선분이 $\dfrac{4\times3}{2}=6$개, 가로 선분 $\dfrac{5\times4}{2}=10$개이므로 $6\times10=60$(개)이다.

(2) 가장 작은 1×1 정사각형 $4\times3=12$(개), 4개씩 붙은 2×2 정사각형 $3\times2=6$(개), 9개씩 붙은 3×3 정사각형 $2\times1=2$(개)이므로 $4\times3+3\times2+2\times1=12+6+2=20$이다.

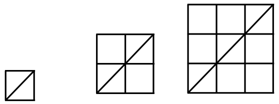
(3) 직각삼각형

(i) [그림1]과 같이 작은 정사각형 안에 2개씩 $2\times12=24$(개)가 있다.

(ii) [그림2]와 같이 2개씩 $2\times6=12$(개)가 있다.

(iii) [그림3]과 같이 2개씩 $2\times2=4$(개)가 있다.

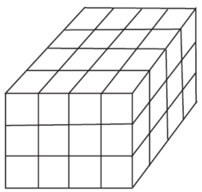
따라서 모두 $24+12+4=40$개이다.



[그림1] [그림2] [그림3]

유제 3

길이가 같은 가로 4, 세로 4, 높이 3으로 이루어진 $4\times4\times3$ 정육면체로 이루어진 직육면체에서 다음을 구하여라.

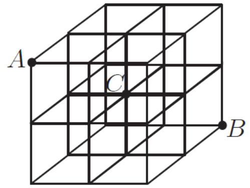


(1) 모든 직육면체의 개수

(2) 크고 작은 정육면체 총수

4 도전예제

그림과 같이 작은 정육면체 8개로 큰 정육면체가 되도록 철사로 입체 모양을 만들어 놓았다. 점 A에서 점 B로 철사를 따라 가장 짧은 거리로 갈 때, 점 C를 지나지 않는 방법은 모두 몇 가지인가? (단, 철사의 굵기는 생각하지 않는다.)



풀이 답: 54 (가지)

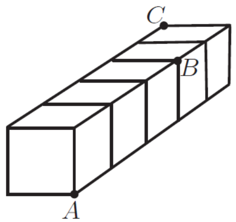
A에서 B까지 가는 방법의 수는 가로로 2칸을 aa, 세로로 2칸 bb, 높이로 2칸을 cc로 하면 $aabbcc$를 일렬로 세우는 방법이므로 $\dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times2\times2}=90$ 가지이다.

A에서 C를 거쳐 B까지 가는 방법의 수는 A에서 C로 가는 방법 abc를 일렬로 세우는 방법이므로 $3\times2\times1=6$가지와 C를 거쳐 B까지 가는 방법 6가지를 곱한 36 가지이다.

A에서 C를 거치지 않고 B까지 가는 방법의 수는 $90-36=54$ (가지)이다.

유제 4

그림은 철사로 정육면체 5개를 붙여놓은 모양을 만든 것이다. A에 있는 쥐가 B를 지나지 않고 철사를 따라 C에 있는 먹이를 먹으로 가는 가장 짧은 서로 다른 길은 모두 몇 가지인가?



5 도전예제 원리탐구

7개의 계단을 오를 때, 최대한 2계단씩 오를 수 있다면 오르는 방법의 수를 구하여라.

풀이 답: 21가지

(해1) 한 칸씩 오르는 것을 a, 두 칸씩 오르는 것을 b라고 하면, 7개의 계단을 오르려면 다음과 같은 방법이 있다.

(ⅰ) $aaaaaaa$ 즉 한 계단씩만 오르는 방법: 1가지

(ⅱ) $aaaaab$ 즉 한번은 두 계단, 다섯 번은 한 계단씩 오르는 방법: $\dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1}=6$가지

(ⅲ) $aaabb$ 즉 두 번은 두 계단, 세 번은 한 계단씩 오르는 방법: $\dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1}=10$가지

(ⅳ) $abbb$ 계단씩만 오르는 방법: $\dfrac{4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}=4$가지이다.

$\therefore$ 모두 $1+6+10+4=21$가지이다.

(해2) 1, 2계단의 오름 방법을 사용하여 n계단을 오르는 방법을 $f(n)$이라고 하자.

계단 수가 $n=1$이면 $f(1)=1$, 계단 수가 $n=2$이면 $f(2)=2$이다.

$f(n)$을 다음과 같이 분류하여 구해보자.(단, $n\geq3$)

(ⅰ) 첫 걸음을 1계단을 사용하여 오르는 경우, 나머지 $n-1$계단을 오르는 방법의 수는 $f(n-1)$

(ⅱ) 첫 걸음을 2계단을 사용하여 오르는 경우, 나머지 $n-2$계단을 오르는 방법의 수는 $f(n-2)$

그러므로 첫걸음을 오르는 방법은 1계단 또는 2계단을 사용하는 방법만 있으므로

$f(n)=f(n-1)+f(n-2)\cdots$ ① 규칙이 성립한다.

①에 $n=3,4,5,6$을 대입해보면, $f(1)=1$, $f(2)=2$이므로

$f(3)=f(2)+f(1)=2+1=3$, $f(4)=f(3)+f(2)=3+2=5$, $f(5)=f(4)+f(3)=5+3=8$,

$f(6)=f(5)+f(4)=8+5=13$, $f(7)=f(6)+f(5)=13+8=21$이다. 즉 피보나치수열의 하나이다.

유제 5

10개의 공이 들어 있는 바구니 A와 비어 있는 바구니 B가 있다. 공을 한 개 또는 두 개씩 계속 뽑아 바구니 A의 공을 바구니 B로 옮기는 방법의 수를 구하여라.

6 도전예제 원리탐구

0, 1, 2, 3, 4를 사용하여 네 자리의 짝수를 만들려고 한다. 이 때, 같은 수를 여러 번 사용하여도 된다. 다음을 구하여라.

(1) 만들 수 있는 짝수의 개수 (2) 만들 수 있는 모든 짝수들의 합

풀이 답: (1) 300개 (2) 816600

(1) 천의 자리에는 0을 제외하므로 4가지, 백과 십의 자리에는 5가지, 일의 자리에는 짝수 0, 2, 4의 3가지이므로 $4\times5\times5\times3=300$개다.

(2) 천의 자리에는 각 수(1, 2, 3, 4)가 $300\div4=75$번씩 쓰인다.

백, 십의 자리에는 각 수(0, 1, 2, 3, 4)가 $300\div5=60$번씩 쓰인다.

일의 자리에는 각 수(0, 2, 4)가 $300\div3=100$번씩 쓰인다.

$\therefore (1+2+3+4)\times75\times1000+(0+1+2+3+4)\times60\times100+$
$(0+1+2+3+4)\times60\times10+(0+2+4)\times100\times1=816600$

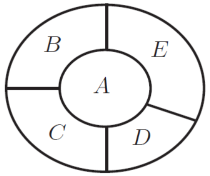
유제 6

0, 1, 2, 3, 4를 사용하여 네 자리의 홀수를 만들려고 한다. 이 때, 같은 수를 여러 번 사용하여도 된다. 다음을 구하여라.

(1) 만들 수 있는 홀수의 개수 (2) 만들 수 있는 모든 홀수들의 합

7 도전예제

5가지 색깔의 물감이 있다. 그림과 같은 A, B, C, D, E의 각 부분에 물감을 칠하는 방법의 수를 구하여라.(단, 같은 색을 여러 번 사용해도 좋지만 이웃하는 부분은 서로 다른 색을 칠해야 한다.)



풀이 답: 420(가지)

A, B, C, D, E 에 차례대로 물감을 칠하는 경우 B 와 D가 같은 색을 칠하느냐 다르게 칠하느냐에 따라 다르다.

(ⅰ) B 와 D가 같은 색을 칠하는 경우

$5\times4\times3\times1\times3=180$ **(가지)**

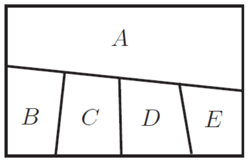
(ⅱ) B 와 D가 다른 색을 칠하는 경우

$5\times4\times3\times2\times2=240$ **(가지)**

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 방법의 수는 $180+240=420$**(가지) 이다.**

유제 7

그림의 5개 부분에 빨강, 노랑, 초록, 파랑, 검정의 어느 색이든지 칠하려고 한다. 같은 색을 몇 번이고 써도 좋으나 서로 인접한 부분은 서로 다른 색으로 칠하는 방법의 수를 구하여라.



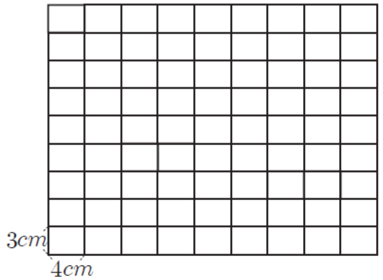
종합문제

1. 7장의 숫자 카드 $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}$ 이 있다. 이 중에서 두 장을 골라 만들 수 있는 두 자리의 자연수를 모두 만들었다. 두 자리의 자연수를 모두 더하면 얼마인가?

2. 3부터 10까지 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 뽑아서 곱할 때, 일의 자리 숫자가 0이 되는 경우는 모두 몇 가지인가?(단, 곱하는 순서만 다른 것은 하나로 본다.)

3. 7장의 숫자 카드 $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}$ 이 있다. 이 중에서 세 장을 꺼낼 때, 어떤 두 장의 수의 합도 6이 되지 않도록 꺼내는 방법은 모두 몇 가지인가?

4. 다음 그림은 가로 $4cm$, 세로 $3cm$ 인 직사각형 81 개가 이어진 것이다. 이 그림에서 선을 따라 그릴 수 있는 정사각형은 모두 몇 개인가?



5. 9 명의 학생들이 서로 다른 방법으로 의자에 앉는 방법에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 세 명의 학생을 A, B, C 라고 하면 이들이 의자에 앉는 방법 방법은 다음과 같이 생각할 수 있다. 만약 마지막 학생 C를 당분간 생각하지 않는다면 A와 B가 앉는 방법은 2가지밖에 없다. 이 2가지 경우 중 하나에 C를 앉게 해보자. 그러면 다음과 같은 세 가지 경우가 있다.

(i) C를 나머지 두 학생 오른쪽에 앉는 경우

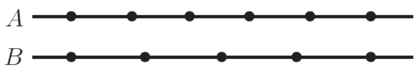
(ii) C를 나머지 두 학생 왼쪽에 앉는 경우

(iii) C를 나머지 두 학생 사이에 앉는 경우

학생 C가 앉는 경우는 위의 3가지 경우 외에는 있을 수가 없다. 즉 두 학생의 순서를 AB, BA로 놓을 수 있고 각각의 경우가 3가지이므로 (   )이다.

(2) 위와 같은 방법으로 한다면 9 명의 학생들이 서로 다른 방법으로 의자에 앉는 방법의 가지 수

6. 직선 A, B 위에 각각 6개와 5개의 점이 있다. 이러한 점을 꼭지점으로 할 때, 그릴 수 있는 삼각형은 모두 몇 개인가?



7. 수돌이네 친구들은 모두 개성이 독특하여 똑같은 맛의 음식을 먹으려 하지 안는다. 마침 오늘이 수돌이 생일이여서 수돌이네 집에서 생일파티를 하기로 하였다. 수돌이 포함 10명이 각각 빵 3개와 음료수 2캔을 먹기로 하였다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 10명이 서로 다른 음료수 2캔을 마시려면 몇 종류의 음료수를 준비하여야 하는가?
(단, 음료수 A, B, C가 있다면 AA와 AB는 서로 다른 맛이다.)

(2) 10명이 서로 다른 빵 3개를 먹으려면 몇 종류의 빵을 준비하여야 하는가?
(단, 빵 A, B, C가 있다면 AAA와 AAB는 서로 다른 맛이다.)

(3) 수돌이 포함 20명이 각각 빵 3개와 음료수 2캔을 먹기로 하였다면 음료수와 빵은 각각 몇 종류를 준비하여야 하는가?

8. 좌표 평면에서 x축의 양의 부분에 9개의 점, y축의 양의 부분에 4개의 점을 잡으면 x축, y축 위의 점을 각각 끝점으로 하는 선분이 36개 만들어진다. 이 36개의 선분이 만드는 교점의 최대 개수를 구하여라.

9. 3장의 카드의 앞면과 뒷면에 각각 0과 1, 2와 3, 4와 5라는 숫자가 한 자씩 적혀 있다. 이 3장의 카드를 한 줄로 늘어놓아 3자리 정수를 만들 때의 경우의 수를 구하여라.

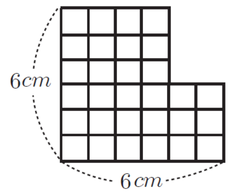
10. 각 면에 칠해진 색이 모두 다른 두 개의 주사위 A와 B가 있다. A에는 6개의 면에 각각 $1, 1, 2, 2, 3, 3$의 수가 쓰여 있고, B에는 6개의 면에 각각 $1, 2, 2, 3, 3, 3$의 수가 쓰여 있다. A와 B를 동시에 던질 때, 나타난 수의 합이 4인 경우의 수는 얼마인가? (단, 숫자가 같아도 면의 색이 다르면 다른 경우로 본다.)

11. 직선 $-ax+by=b$가 있다. 주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 할 때, 서로 다른 직선의 개수를 구하여라.

12. 어떤 경기에서 세 경기를 먼저 이기는 팀이 우승한다고 한다. A, B 두 팀이 이러한 경기를 진행했을 때, 결과에 대해 일어날 수 있는 모든 경우의 수를 구하여라. (단, 비기는 경우는 없다.)

13. 프로야구 한국시리즈에서 두산과 삼성이 7전 4선승제로 승부를 가리고 있다. 세 번 시합한 결과 두산이 1승 2패로 뒤지고 있다. 시합을 계속할 때 우승팀이 결정되는 경우의 수를 m, 이 중에서 두산이 우승하는 경우의 수를 n이라 할 때, m, n의 값을 각각 구하여라. (단, 무승부는 없다.)

14. 아래 그림의 도형을 가로와 세로를 $1cm$ 간격으로 나눌 때, 선분을 따라 만들 수 있는 정사각형은 모두 몇 개인가?



15. 마티 왕 일행은 악마 바이스를 피해 낯선 도시에 와 있었다. 그 도시에는 신기한 말하는 자판기가 있었는데 문제를 맞히면 원하는 음료수를 얻을 수 있었다. 자판기는 "1000원짜리 2장, 500원짜리 3개, 100원짜리 4개로 음료수를 얻기 위한 이 두 가지 질문에 대한 답을 구하여라.

(1) **지불하는 방법**은 몇 가지인가?

(2) **지불할 수 있는 금액**은 몇 가지인가?"

16. $discovery$의 모든 철자를 이용해 순열을 만들 때 다음 경우의 수를 구하라.
(1) d와 c사이에 2개의 철자가 들어가는 경우

(2) 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우

17. 좌표평면 위를 움직이는 점 P가 있다. 주사위를 던져서 나타나는 눈의 수 n이 홀수이면 x축의 양의 방향으로 n만큼 나아가고, n이 짝수이면 y축의 양의 방향으로 n만큼 나아간다고 한다. 이러한 시행을 몇 번 반복하여 원점에서 출발한 점 P가 점 $(4,4)$에 도달하게 되는 경우의 수를 구하여라.

18. 다섯 개의 숫자 1, 1, 2, 3, 4에서 세 개를 뽑아서 만들 수 있는 세 자리 자연수를 작은 것부터 차례로 나열했을 때, 20번째에 있는 수는 무엇인가?

19. 계단을 오르는 방법은 한 번에 1계단을 올라가는 것과 한 번에 2계단을 올라가는 것 두 가지다. 계단이 10개가 있을 때, 맨 아래에서 맨 위까지 올라가는 모든 경우의 수는 먼저 10번째 계단을 밟는 최종적인 상황만 생각해보자.
10번째 계단을 밟는 방법은 9번째 계단에서 1계단 올라가는 경우와 8번째 계단에서 동시에 2계단을 올라가는 경우가 있다. 10번째 계단을 밟는 경우는 이렇게 2가지 경우가 있다. 이걸 식으로 만들어 보면 다음과 같다.
(10번째 계단을 올라가는 모두 경우의 수)
= (9번째 계단을 올라가는 모든 경우의 수)+(8번째 계단을 올라가는 모든 경우의 수)
이건 10번째 계단뿐만 아니라, 모든 계단에 적용된다.
그러니까, 계단을 올라가는 모든 방법의 수는 바로 앞 계단을 올라가는 모든 방법의 수에 두 번째 앞 계단을 올라가는 모든 방법의 수를 더하는 것이다. 임의의 n번째 계단을 올라가는 모든 경우의 수를 $A(n)$이라고 하면, 다음과 같은 일반적인 식을 얻는다.

$$A(n)=A(n-1)+A(n-2)$$

10번째 계단을 올라가는 모든 경우의 수는 위의 규칙으로 숫자를 10개 쓰면 답을 얻을 수 있다. 먼저 1번째 계단을 올라가는 방법은 1가지 방법(1계단 1번)이 있고, 2번째 계단을 올라가는 모든 경우의 수는 2가지 방법이다.
(1계단 2번 또는 2계단 1번), 3번째 계단을 올라가는 모든 경우의 수는 위의 규칙대로 쓰면 된다. 그러면 다음과 같은 수열을 생각할 수 있다.

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89$$

이렇게 써보면 10번째 계단까지 올라가는 모든 경우의 수는 89가지다.
위와 같은 것의 이해를 통해 다음을 구하여라.
(1) 수 '1'과 '2' 두 수만 가지고 합이 7이 되게 하는 방법의 수를 구해보라.

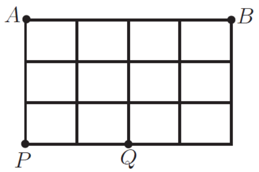
(2) 수 '1'과 '2' 두 수만 가지고 합이 n이 되게 하는 방법의 수를 구해보라.

(3) 계단을 오르는 방법은 한 번에 1계단을 올라가는 것과 한 번에 2계단을 올라가는 것, 한 번에 3계단을 올라가는 것, 세 가지다. 계단이 7개가 있을 때, 맨 아래에서 맨 위까지 올라가는 모든 경우의 수를 구하여라.

20. 1부터 40까지 자연수 중에서 첫째로 뽑은 수를 x, 둘째로 뽑은 수를 y라 할 때, $x\times y$가 4의 배수가 되는 경우는 모두 몇 가지인가? (단, $x=y$이어도 된다.)

도전문제

1. 그림과 같이 직사각형 모양으로 도로가 나있는 지역에 2곳의 피자가게 P, Q가 있다. 2곳의 피자가게 중 어느 한 곳은 꼭 들러서 간다고 할 때, A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구하여라.



2. 정육각형 $ABCDEF$에 정삼각형을 그리려고 한다. 정삼각형의 꼭지점 중에서 적어도 2개는 정육각형 $ABCDEF$의 꼭지점 중에서 뽑을 때, 그릴 수 있는 서로 다른 정삼각형은 모두 몇 개인가?

3. 모든 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$을 $f(n)=(n$의 각 자리의 수의 곱)으로 정의한다. 예를 들면 $f(47)=4\times7=28$이다. 일의 자리가 0이 아닌 두 자리의 자연수 a,b,c가 $f(a)+f(b)+f(c)=6$을 만족할 때, 세 수 a,b,c의 곱 abc의 값은 모두 몇 가지인가?

4. 아래 7개의 정수를 적당히 배열하여 앞에서부터 4개의 정수의 합과 뒤에서부터의 4개의 정수의 합이 모두 3의 배수가 되게 하려고 한다. 가능한 배열은 모두 몇 가지인가?

144, 154, 164, 174, 184, 194, 204

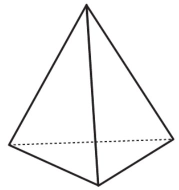
[사고력퀴즈와 퍼즐]

1. **마술사가 1부터 100까지 쓰인 카드 100장을 가지고 있다. 그가 빨간색, 파란색, 노란색의 3개의 상자에 이 카드를 모두 넣는데 각 상자에 최소한 한 장 이상의 카드를 넣는다. 관객 중 한 명이 나와 세 개의 상자 중 두 개를 골라 이 두 상자에서 한 장씩의 카드를 뽑아 두 장의 카드에 쓰인 숫자의 합을 말한다. 이 합을 듣고 마술사는 세 상자 중 카드가 뽑히지 않은 상자를 맞추는 게임을 한다. 마술사가 항상 이길 수 있도록 세 상자에 카드를 넣는 방법은 모두 몇 가지인가?**

[생활 속의 수학]

1. 진열장 안에 진열된 정사면체는 모두 몇 개일까?

그림과 같은 4각뿔모양의 피라미드들이 흰색, 검은색, 적갈색등 세 가지 색깔을 기반으로 했으나 전부 다르게 칠해져 있다는 사실을 발견했다. 이 유리 진열장 안에 진열된 정사면체는 모두 몇 개일까?



[읽을거리]

1. 하노이 탑과 지구의 종말

1883년 프랑스 수학자 루카스(Lucas, E.)는 하노이 탑이라고 불려 지게 된 유명한 문제를 고안해 내었습니다.

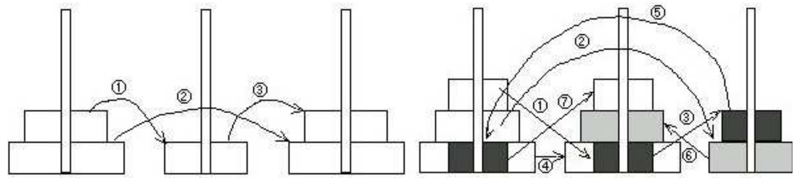
베트남의 수도인 하노이에 있는 불교 사원에는 다음과 같은 이야기가 전해져 내려옵니다.

인도 동쪽에는 베나레스라는 마을이 있고 그 곳에는 세계의 중심을 상징하는 아주 큰 브라만교 사원이 있었습니다. 승려들은 이 신성하고 거룩한 성전을 위하여 밤낮으로 기도를 하며 신을 정성껏 모셨습니다. 전설에 따르면 이 사원에는 천지 창조 시에 가운데에 작은 구멍이 뚫린 64개의 금으로 된 원판이 보관되어 있었다고 합니다. 이들 원판은 어느 것도 크기가 같지 않으며, 다음 그림과 같이 작은 원판이 큰 원판 위에 오도록 포개어져, 높이가 $50cm$정도 되는 다이아몬드로 막대 3개 가운데 한 개에 끼워져 있었다고 합니다.

하지만 점차 그들은 마을 사람들이 바치는 온갖 제물과 보석에 눈이 멀어 기도를 게을리 하고 타락한 생활을 하기 시작하였습니다. 이를 보다 못한 신은 직접 승려들을 불러 모아 꾸중을 하며 다음과 같이 명령을 하고 사라졌습니다.

"한 번에 하나씩 원판을 옮기되 절대 작은 원판 위에 큰 원판을 두어서는 안 된다. 이렇게 64개의 원판이 모두 다른 막대로 옮겨지면 세상은 종말이 올 것이며, 충실한 자는 상을 받을 것이고 불충실한 자는 벌을 받을 것이다"

아직까지도 세상의 종말이 오지 않은 것을 보면 승려들은 여전히 원판을 옮기고 있는 걸까요?
승려들이 원판 64개를 모두 옮기는데 얼마만큼의 시간이 걸리는지 계산해 봅시다.



원판이 2개 있을 때　　　원판이 3개 있을 때

원판의 개수가 하나일 경우에는 한 번 만에 이동할 수 있고, 두 개일 때는 세 번 만에,
세 개일 때는 일곱 번 만에 이동할 수 있다는 사실을 쉽게 알 수 있다.(단, 원판의 이동 횟수는 최소로 한다.)

하지만 원판이 네 개일 경우부터는 원판을 이동하는 방법이나 횟수를 아는 일이 쉽지 않다. 그러면 원판을 옮기는 횟수에 숨어있는 규칙성을 찾아내보자.

원판이 세 개일 경우, 위쪽에 있는 두 개의 원판을 모두 다른 막대로 옮기고 맨 아래 있던 원판을 빈 막대로 옮긴 후 처음 두 개의 원판을 다시 원래 모양대로 쌓아 두면 된다. 원판 두개를 옮길 때 3번의 이동이 필요하므로 총 이동 횟수는 $3+1+3=7$, 7번이 되는 것이다.

원판이 네 개일 경우에는 원판 세 개를 먼저 이동하고 맨 아래 원판을 빈 막대에 옮긴 후 다시 세 개의 원판을 제자리로 옮기면 된다. 그리하여 모두 $7+1+7=15$, 15번의 이동을 하게 된다.

그러면 원판이 다섯 개의 경우에는 $15+1+15=31$의 이동이 필요하며 n개의 원판이 이동할 때 필요한 최소 이동횟수를 a_n이라 하면, $a_{n+1}=2a_n+1$이라는 식을 얻어낼 수 있다.

그리고 $1, 3, 7, 15, 31, \cdots$ 등으로 진행되는 수의 배열을 자세히 관찰하면 모두 원판의 개수만큼 2를 거듭제곱한 수에서 1씩 모자란다는 사실도 알게 된다. 그리하여 결국 64개의 원판을 옮기는 데에는 2를 64번 곱한 다음 1을 뺀 수$(=2^{64}-1)$이다. 승려들이 원판을 하나 옮기는데 1초가 걸리고 승려들은 교대로 쉼 없이 하루 24시간, 1년 365일 내내 실수 없이 일을 한다고 가정해도

즉, $2^{64}-1=18,446,744,073,709,551,615$(초)

$\fallingdotseq 583,334,858,456$ (년)

$\fallingdotseq 5,833$(억년)

천문학자들의 말에 의하면 우주의 나이는 약 200억 년, 지구의 나이는 약 30억 년이라고 한다.

이 전설에 의하여 지금으로부터 세상의 종말이 올 때까지는 세상의 종말을 우주의 종말로 생각할 때 $5833-200=5633$(억년), 세상의 종말을 지구의 종말로 생각할 때 $5833-30=5803$(억년) 의 세월이 남아 있다.

아마도 우리가 걱정할 필요가 없을 정도로 아득히 먼 미래의 일이 될 것이다.