

100 문제를 푸는 것보다 **원리**를 가르칩니다!

원리탐구 중2 수학

중2 수학(상)

내신 대비 및 심화 문제 **탐/구/편**

Mathematics The discovery of dharma 최 경 호 지음



MATHEMATICS



중2수학(상)탐구 차례		
제 1장	유리수와 순환소수	3
제 2장	식의 계산	25
제 3장	곱셈 공식과 등식의 변형	47
제 4장	연립방정식	71
제 5장	연립방정식의 활용	93
제 6장	일차부등식	117
제 7장	연립부등식	139
제 8장	일차함수와 그래프	161
제 9장	일차함수의 활용	183

읽을거리		
제 1장	1. 순환마디의 재미있는 규칙	24
제 2장	1. 지수 탄생의 역사적 배경	46
제 3장	1. 인도의 배다 수학	69
제 4장	1. 방정식 풀이에 관한 동서양의 차이(1)	91
제 5장	1. 방정식 풀이에 관한 동서양의 차이(2)	116
제 6장	1. 부등식의 기호 $>$, $<$ 의 유래	138
제 7장	1. 극장 바닥과 부등식	160
제 8장	1. 좌표평면이 있으면 편리한 점이 무엇일까?	182
제 9장	1. 일차함수의 활용	204

제 1장 유리수와 순환소수



1 탐구예제



다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

- ① 모든 순환소수는 유리수이다.
- ② 유한소수로 나타낼 수 없는 분수는 반드시 순환소수로 나타낼 수 있다.
- ③ 순환마디가 9인 순환소수는 모두 정수 또는 유한소수로 나타낼 수 있다.
- ④ 유리수는 모두 유한소수로 나타낼 수 있다.
- ⑤ 모든 소수는 분수로 나타낼 수 있다.
- ⑥ 모든 순환소수는 무한소수이다.
- ⑦ 0이 아닌 유리수는 모두 순환소수로 나타낼 수 있다.
- ⑧ 분모의 소인수가 2나 5뿐인 유리수는 유한소수로 나타낼 수 있다.
- ⑨ 모든 순환소수는 분수로 나타낼 수 있다.
- ⑩ 순환소수 중에는 유리수가 아닌 것도 있다.
- ⑪ 유한소수는 순환소수로 나타낼 수 있다.
- ⑫ 기약분수는 유한소수가 아니면 순환소수이다.
- ⑬ 두 개의 무한소수의 합은 항상 무한소수이다.

풀이 답: ①, ②, ③, ⑦, ⑧, ⑨, ⑪, ⑫

- ④ 반례: $\frac{1}{3}$ 은 순환소수이다.
- ⑤ 반례: 순환하지 않는 무한소수는 분수로 나타낼 수 없다.
- ⑥ 반례: 순환마디가 9이면 유한소수로 고칠 수 있다. $0.\dot{1}9 = 0.2$
- ⑩ 반례: 순환소수는 모두 유리수이다. ⑬ 반례: $0.\dot{3} + 0.\dot{6} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

유제 1

다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (2개)

- ① 모든 무한 소수는 분수로 나타낼 수 있다.
- ② 무한 소수는 모두 순환 소수이다.
- ③ 모든 순환 소수는 유리수이다.
- ④ 분모의 소인수가 3과 5뿐인 분수는 순환 소수로만 나타낼 수 있다.
- ⑤ 정수가 아닌 유리수는 유한 소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.

2 탐구예제



분수 $\frac{7^2}{2^3 \times 5 \times 7 \times x}$ 을 순환소수로 나타낼 수 있는 20 이하의 자연수 x 의 개수를 구하여라.

풀이 답: 10개

$\frac{7^2}{2^3 \times 5 \times 7 \times x} = \frac{7}{2^3 \times 5 \times x}$ 순환소수가 되려면 x 에 2, 5를 제외한 소인수가 있어야 한다.
그리고 분자에 7이 있으므로 7, 14도 제외한다. 그러므로 x 는 3, 6, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19이어야 한다. 그러므로 10개다.

유제 2

분수 $\frac{21}{2^3 \times 5 \times a}$ 을 순환소수로만 나타낼 수 있도록 하는 20이하의 자연수 a 의 개수를 구하여라.

3 탐구예제



$\frac{a}{30}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고, 이 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{3}{b}$ 이다. a 가 10 미만의 홀수일 때, a, b 의 값을 구하여라.

풀이 답: $a=9, b=10$

$30=2 \times 3 \times 5$ 이므로 유한소수가 되려면 분모에 3이 없어야하므로 a 는 3의 배수이어야 한다. 따라서 $a=3 \times x$ 라 하면, $\frac{3 \times x}{30} = \frac{3}{b}$ 에서 $\frac{x}{10} = \frac{3}{b}$ 이다.
그러므로 $x=3$ 이고 $a=9, b=10$ 이다.

유제 3

$\frac{a}{70}$ 를 약분하면 $\frac{1}{b}$ 이고, 이것을 소수로 나타내면 유한소수이다. $10 < a < 20$ 일 때, 정수 a, b 의 값을 구하여라.

100 문제를 푸는 것보다 원리를 가르칩니다!

4 탐구예제



순환소수 $0.5\dot{6}7$ 을 x 라 할 때, 10의 거듭제곱을 사용하여 x 를 분수로 나타내어라.

풀이 답: $\frac{281}{495}$

$1000x = 567.6767 \dots$ ①, $10x = 5.6767 \dots$ ②라 하자.

① - ②, $990x = 562$ 이므로 $x = \frac{562}{990} = \frac{281}{495}$ 이다.

유제 4

순환소수 $1.\dot{6}\dot{3} = \frac{a}{11}$ 이고, 기약분수 $\frac{b}{18}$ 를 소수로 나타내면 $0.3888 \dots$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

5 탐구예제



분수 $\frac{3}{14}$ 을 소수를 고친 후 소수점 아래 n 번째 자리의 숫자를 $f(n)$ 이라 할 때, 다음 물음에
 답하여라.(단, $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ 이다.)

(1) $\frac{3}{14}$ 을 소수로 나타내어라.

(2) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(98)$ 의 값을 구하여라.

풀이 답: (1) $0.2\dot{1}4285\dot{7}$ (2) 435

$$(1) \frac{3}{14} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7 \times 5} = \frac{1}{10} \left(2 + \frac{1}{7} \right) = 0.2\dot{1}4285\dot{7} \frac{3}{14} = 0.2\dot{1}4285\dot{7}$$

(2) $98 = 1 + 6 \times 16 + 1$ 이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(98) = 2 + (1+4+2+8+5+7) \times 16 + 1 = 2 + 432 + 1 = 435 \text{이다.}$$

유제 5

$\frac{5}{27}$ 를 소수로 나타내었을 때, 소수점아래 101번째 자리의 숫자를 a 라 하고 $3.231\dot{2}7$ 의 소수점아래 100번째 자리의 숫자를 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

100 문제를 푸는 것보다 원리를 가르칩니다!

6 탐구예제



두 순환소수 $0.\dot{a}\dot{b}$, $0.\dot{b}\dot{a}$ 의 합이 $0.\dot{3}$ 일 때, 물음에 답하여라.(단, a, b 는 자연수이고, $a > b$ 이다)

(1) a, b 의 값을 구하여라.

(2) 두 수의 차를 순환소수로 나타내어라.

풀이 답: (1) $a = 2, b = 1$ (2) $0.\dot{0}\dot{9}$

$$(1) \frac{10a+b}{99} + \frac{10b+a}{99} = \frac{11a+11b}{99} = \frac{a+b}{9} = \frac{3}{9}, \quad a+b=3 \text{ 이고, 조건에 맞는 것은 } a=2, b=1$$

이다.

$$(2) \frac{10a+b}{99} - \frac{10b+a}{99} = \frac{9a-9b}{99} = \frac{9(a-b)}{99} = \frac{9}{99} = 0.\dot{0}\dot{9}$$

유제 6

두 수 a, b 가 각각 한 자리의 자연수일 때, $0.\dot{a}\dot{b} - 0.\dot{b}\dot{a} = \frac{8}{45}$ 을 만족하는 순서쌍을 모두 구하여라.

7 탐구예제



어느 기약분수를 순환소수로 나타내는 데 A 는 분모를 잘못보아 답이 $1.\dot{1}\dot{8}$ 이 되고 B 는 분자를 잘못보아 답이 $1.91\dot{6}$ 이 되었다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 이 분수를 구하여라.

(2) 이 분수를 순환소수로 나타내어라.

풀이 답: (1) $\frac{13}{12}$ (2) $1.08\dot{3}$

(1) $1.\dot{1}\dot{8} = \frac{118-1}{99} = \frac{13}{11}$ 에서 A 는 분모를 잘못 보았으므로 분자 13을 선택하고,

$1.91\dot{6} = \frac{1916-191}{900} = \frac{1725}{900} = \frac{23}{12}$ 에서 B 는 분자를 잘못 보았으므로 분모 12를 선택한다.

※ 기약분수라는 말에 주의하자.

(2) $\frac{13}{12} = 1.08\dot{3}$

유제 7

어떤 기약분수를 소수로 나타내는 데, 수돌이는 분모를 잘못 보아 $0.78\dot{6}$ 을 얻고, 학돌은 분자를 잘못 보아 $0.\dot{7}\dot{2}$ 를 얻었다. 처음의 분수를 구하여라.

100 문제를 푸는 것보다 원리를 가르칩니다!

8 탐구예제



$x = 0.3\dot{8}$ 일 때, $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{x}}}$ 의 값을 소수로 나타내어라.

풀이 답: 0.14

$$x = 0.3\dot{8} = \frac{38-3}{90} = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}$$

$$(\text{준 식}) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{x+2}} = 1 - \frac{x+2}{x+2+x} = \frac{2x+2}{2x+2} - \frac{x+2}{2x+2}$$

$$= \frac{x}{2x+2} = \frac{\frac{7}{18}}{2 \times \frac{7}{18} + 2} = \frac{7}{14+36} = 0.14$$

유제 8

$x = 0.\dot{a}$ 일 때, $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 0.8\dot{1}$ 이다. a 의 값을 구하여라.

종합문제 >>

1. 다음 중에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

- ㉠ 모든 정수는 유리수이다.
 ㉡ 모든 유리수는 유한소수이다.
 ㉢ 모든 순환소수는 유리수이다.
 ㉣ 정수가 아닌 유리수는 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있다.

- ① ㉠, ㉡, ㉣ ② ㉠, ㉢, ㉣ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

2. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 모든 유한 소수는 유리수이다.
 ② 무한 소수 중에는 분수로 나타낼 수 없는 것도 있다.
 ③ 두 개 이상의 무한 소수의 합은 항상 무한 소수로만 나타낼 수 있다.
 ④ 순환 소수는 모두 분수로 나타낼 수 있다.
 ⑤ 유한 소수는 무한 소수로 나타낼 수 있다.

3. 다음 중 옳지 않은 것을 두 가지 고르면?

- ① 분모에 2나 5 이외의 소인수가 있는 기약분수는 모두 무한소수로 나타낼 수 있다.
 ② 정수가 아닌 유리수 중에는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 없는 것도 있다.
 ③ 유한소수로 나타낼 수 없는 기약분수는 모두 순환소수로 나타낼 수 있다.
 ④ 0이 아닌 모든 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있고 또 모든 순환소수는 분수로 나타낼 수 있다.
 ⑤ 두 개의 무한소수의 합은 무한소수로만 나타내어진다.

100 문제를 푸는 것보다 **원리**를 가르칩니다!

4. 다음 분수를 소수로 나타낼 때, 유한소수로 나타내어지는 것을 모두 찾으시오?

- ① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{6}{2^3 \times 3^3 \times 5^2}$ ③ $\frac{105}{42}$ ④ $\frac{3^2}{2 \times 6^2}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

5. $\frac{1}{350}, \frac{2}{350}, \frac{3}{350}, \dots, \frac{349}{350}$ 에 대하여 유한소수의 개수를 구하면?

- ① 49 ② 50 ③ 56 ④ 65 ⑤ 69

6. 분수 $\frac{a}{b}$ 가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 분자 a 의 값을 구하여라.

 (가) a 는 7 의 배수이고, 두 자리의 수이다.

(나) b 의 값은 1100 이다.

(다) 분수 $\frac{a}{b}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이다.

7. $0.\dot{a}b + 0.\dot{b}a = 0.\dot{1}$ 일 때, a, b 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 0 이상의 정수, $a > b$ 이다.)

8. 분수 $\frac{x}{120}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고, 이 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{1}{y}$ 이 된다고 한다.

x 가 $20 < x < 25$ 인 자연수일 때, $\frac{x}{y}$ 의 값을 구하여라.

9. 순환소수 $0.7\dot{a}$ 를 분수로 고치면 $\frac{22}{30}$ 이고, 순환소수 $0.17\dot{b}$ 를 분수로 고치면 $\frac{31}{180}$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 한 자리의 자연수이다.)

100 문제를 푸는 것보다 **원리**를 가르칩니다!

10. 다음 식을 만족하는 한 자리의 자연수 A 를 구하여라.

$$0.4\dot{A} = \frac{A+1}{15}$$

11. 자연수 a 에 $1.\dot{8}$ 을 곱해야 할 것을 잘못하여 1.8 을 곱하였더니 정답과 오답의 차이가 $0.2\dot{6}$ 이 되었다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

12. 순환소수 $x = 0.2063420634 \dots$ 에 대하여 $1-x$ 를 소수로 나타내었을 때, 소숫점 아래 100 번째 자리의 수를 구하여라.

13. 분수 $\frac{3}{7}$ 을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 a 번째 수를 x_a 라 할 때, 다음 값을 구하여라.

(단, $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ 이다.)

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{58} + x_{59} + x_{60}$$

14. $\left(\frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{100} + \cdots\right) \times \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{100} + \cdots\right)$ 를 계산하여라.

15. $\frac{A}{880}$ 를 소수로 나타내면 소수점 아래 셋째자리에서 순환마디가 시작될 때 가장 작은 자연수 A 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

100 문제를 푸는 것보다 **원리**를 가르칩니다!

16. $\frac{90}{1111} = x$ 라 할 때, $(10^4 - 1) \times x$ 는 몇 자리의 자연수인지 구하여라.

17. $\frac{2}{7}$ 를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 38 번째 자리에 오는 수를 a , 60 번째 자리에 오는 수

를 b 라고 할 때, $0.\dot{a}b - 0.\dot{b}a$ 의 값을 순환소수로 나타내어라. (단, $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ 이다.)

18. 다음 〈보기〉 중 유한 소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 고르면?

㉠ $\frac{24}{75}$	㉡ $\frac{27}{2 \times 5^2 \times 3^2}$	㉢ $\frac{3}{105}$	㉣
$\frac{8}{2 \times 3 \times 4}$			
㉤ $\frac{120}{2^3 \times 3 \times 5^2}$	㉥ $\frac{3}{85}$	㉦ $\frac{7}{22}$	㉧
$\frac{27}{2^2 \times 3^3 \times 5^2}$			

- ① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢, ㉤ ③ ㉡, ㉤, ㉧
 ④ ㉠, ㉢, ㉤, ㉥ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

탐구문제>>>

1. 분모와 분자의 합이 50 인 기약분수를 소수로 나타내어 소수점 아래 둘째 자리에서 반올림하였더니 0.3 이 되었다. 이러한 분수를 모두 구하여라.

2. $\frac{4567}{9900} = 0.ab\dot{c}d$ 에 a, b, c, d 는 $1, \dots, 9$ 중 어느 한 수를 나타낸다. 이 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라.

19. k 는 100 이하의 자연수이고 $\frac{17k}{102}$ 가 정수가 아닌 유한 소수가 되는 k 의 개수를 구하여라.

20. 수직선 위에서 두 수 0, 1에 대응하는 두 점 사이를 14등분할 때, 14등분하는 13개의 점에 대응하는 유리수 중 유한소수의 개수는 몇 개인지 구하여라.

21. x 에 관한 일차방정식 $34x - 3a = 2(1 + 3x)$ 의 해를 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 이 때, a 의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

3. 분수 $\frac{a}{175}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 이 수를 기약분수로 나타내면 $\frac{b}{c}$ 가 된다고 한다. 이를 만족하는 자연수 a, b, c 에 대하여 자연수 $a-b-c$ 의 최솟값을 구하여라.

4. 정수가 아닌 유리수 $\frac{x}{180}$ 가 소수점아래 첫째 자리부터 순환하는 순환소수가 되도록 하는 500 이하의 자연수 x 의 개수를 구하여라.

100 문제를 푸는 것보다 **원리**를 가르칩니다!

[사고력 퀴즈와 퍼즐]

1. 고대 이집트인들은 $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ 과 같이 분수를 분모가 다른 단위분수의 합으로 나타내었다.

□ 안에 알맞은 수를 구하여라.

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square}$$

[생활 속의 수학]

1. 계산기를 이용하여 순환마디 찾기

분수 $\frac{1}{n}$ (n 은 자연수) 중에서 소수로 나타내면 순환마디가 $(n-1)$ 개인 순환소수가 되는 경우가 있다.

$\frac{1}{7}$ 도 소수로 나타내면 순환마디가 6개인 순환소수이며, $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ 을 각각 소수로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{1}{7} = 0.142857\dot{1}, \quad \frac{2}{7} = 0.285714\dot{2}, \quad \frac{3}{7} = 0.428571\dot{3}$$

$$\frac{4}{7} = 0.571428\dot{5}, \quad \frac{5}{7} = 0.714285\dot{7}, \quad \frac{6}{7} = 0.857142\dot{8}$$

이때, 순환마디는 모두 여섯 개의 숫자 1,2,4,5,7,8로 되어 있으며 숫자의 배열만 다르다. 즉, 소수로 나타내면 소수점 아래의 몇 개의 숫자가 지나면 모두 142857이 반복된다.

이와 같은 성질을 갖는 분수로 $\frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{23}, \frac{1}{29}, \frac{1}{47}$ 등이 있다. 위의 성질을 이용하면 열두

자리 숫자까지만 표시되는 계산기로도 $\frac{1}{17}$ 의 순환마디를 모두 찾을 수 있다.

$\frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \frac{3}{17}, \dots$ 을 계산기로 계산하여 순환마디가 겹치는 부분을 이용하여 16개의 숫자를 찾는다.

$$\frac{1}{17} = 0.05882352941\dot{1}, \quad \frac{7}{17} = 0.41176470588\dot{2}$$

따라서 $\frac{1}{17} = 0.0588235294117647\dot{1}$ 임을 알 수 있다.

(출전: 중학교 수학2, 지학사)

[읽을거리]

1. 순환마디의 재미있는 규칙

분모가 7 또는 13인 분수는 순환소수로 나타내었을 때, 그 순환마디에 재미있는 규칙이 있다.

[$\frac{n}{7}$ 의 순환마디] $\frac{n}{7}$ ($n=1, 2, 3, \dots, 6$)을 순환소수로 나타내었을 때 그 순환마디의 숫자는 6개이

고 모두 같은 숫자로 이루어져 있다.

$\frac{1}{7}$	0.142857142857...	$\frac{2}{7}$	0.285714285714...
$\frac{3}{7}$	0.428571428571...	$\frac{4}{7}$	0.571428571428...
$\frac{5}{7}$	0.714285714285...	$\frac{6}{7}$	0.857142857142...

순환 마디의 숫자는 모두 다음의 순서를 따른다.

$$\dots \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \dots$$

[$\frac{n}{13}$ 의 순환마디] $\frac{n}{13}$ ($n=1, 2, 3, \dots, 12$)을 순환소수로 나타내었을 때, 그 순환마디의 숫자는 6개

이고 다음과 같이 두 모임으로 나누어진다.

$\frac{1}{13}$	0.076923076923...	$\frac{2}{13}$	0.153846153846...	$\frac{3}{13}$	0.230769230769...
$\frac{4}{13}$	0.307692307692...	$\frac{5}{13}$	0.384615384615...	$\frac{6}{13}$	0.461538461538...
$\frac{7}{13}$	0.538461538461...	$\frac{8}{13}$	0.615384615384...	$\frac{9}{13}$	0.692307692307...
$\frac{10}{13}$	0.769230769230...	$\frac{11}{13}$	0.846153846153...	$\frac{12}{13}$	0.923076923076...

$\frac{1}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{9}{13}, \frac{10}{13}, \frac{12}{13}$ 의 순환마디의 숫자는 모두 다음의 순서를 따른다.

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$$

또, $\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{6}{13}, \frac{7}{13}, \frac{8}{13}, \frac{11}{13}$ 의 순환마디의 숫자는 모두 다음의 순서를 따른다.

$$\dots \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow \dots$$

(출전: 중학교 수학 익힘책2, 천재교육사)