100문제를 푸는 것보다 문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

MATHEMATICS

원리탐구 중등수학

중2 수학(상)

최상위권 학생을 위한 고난이도 문제 **도/전/편**

The discovery of dharma Series Challenge

최 경호 지음

홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이

원리탐구

중2수학(상) 도전 차례

제 1강 유리수와 순환소수

1 도전예제

원리탐구

두 순환소수 $0.\dot{a}\dot{b}$, $0.\dot{b}\dot{a}$의 합이 $0.\dot{3}$일 때, 물음에 답하여라.(단, a, b는 자연수이고, $a > b$이다)

(1) a, b의 값을 구하여라.

(2) 두 수의 차를 순환소수로 나타내어라.

풀이 답: (1) $a = 2$, $b = 1$ (2) $0.\dot{0}\dot{9}$

(1) $\dfrac{10a+b}{99} + \dfrac{10b+a}{99} = \dfrac{11a+11b}{99} = \dfrac{a+b}{9} = \dfrac{3}{9}$, $a+b=3$ 이고, 조건에 맞는 것은 $a=2$, $b=1$이다.

(2) $\dfrac{10a+b}{99} - \dfrac{10b+a}{99} = \dfrac{9a-9b}{99} = \dfrac{9(a-b)}{99} = \dfrac{9}{99} = 0.\dot{0}\dot{9}$

유제 1

두 수 a, b가 각각 한 자리의 자연수일 때, $0.a\dot{b} - 0.b\dot{a} = \dfrac{8}{45}$을 만족하는 순서쌍은 모두 몇 개인가?

2 도전예제

원리탐구

분수 $\dfrac{A}{150}$를 소수로 고치면 유한소수이고, 이 분수를 기약 분수로 고치면 $\dfrac{1}{B}$이다.

$10 < A < 20$일 때, A, B의 값을 구하여라.

풀이 답: $A = 15$, $B = 10$

$150 = 2 \times 3 \times 5^2$이므로 $\dfrac{A}{150}$가 유한 소수가 되려면 A는 3의 배수이어야 한다.

또, $\dfrac{A}{150}$를 기약분수로 고치면 $\dfrac{1}{B}$이 되어야 하므로 $A = 3 \times 2^a \times 5^b$ (단, $a = 0, 1$ 이고, $b = 0, 1, 2$ 이다.)

$10 < A < 20$인 자연수이므로 $a = 0$, $b = 1$일 때, $A = 3 \times 5 = 15$, $B = 10$ 이다.

유제 2

양의 유리수 $\dfrac{a}{252}$를 기약분수로 나타내면 $\dfrac{1}{b}$이고, 이것을 소수로 고치면 유한소수가 된다고 한다. 이 때, 정수 $a+b$의 최소값은 얼마인가?

3 도전예제 원리탐구

x가 1에서 500까지 자연수이고, 정수가 아닌 유리수 $\frac{x}{180}$가 소수점아래 첫째 자리부터 순환하는 순환소수가 되도록 하는 x의 개수를 구하여라.

풀이 답: 23 (개)

$\frac{x}{180}$가 소수점 아래 첫째 자리부터 순환마디가 시작되려면 분모에 2와 5가 없어야 한다. 즉. $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$이므로 분모에 $2^2 \times 5 = 20$의 배수가 없어야 한다. 따라서 x는 20의 배수이다. 이 때, 1부터 500까지 수 중 20의 배수의 개수는 $\frac{500}{20} = 25$(개) 또, $\frac{x}{180}$가 정수가 아니어야 하므로 x는 180의 배수가 아니다. 이 때, 1부터 500까지 수 중 180의 배수의 개수는 $\frac{500}{180} = 2.\dot{7}$ $\therefore$ 2개

따라서 구하는 x의 개수는 $25 - 2 = 23$ (개)이다.

유제 3

x가 1에서 500까지 자연수이고, 정수가 아닌 유리수 $\frac{x}{180}$가 유한소수가 되도록 하는 x의 개수를 구하여라.

4 도전예제 원리탐구

$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}} = 0.\dot{5}\dot{4}$ 일 때, x를 순환소수로 나타내어라.

풀이 답: $1.8\dot{3}$

$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{-1}} = \dfrac{1}{x}$ 이므로 $\dfrac{1}{x} = 0.\dot{5}\dot{4} = \dfrac{54}{99}$, $x = \dfrac{11}{6} = 1.8\dot{3}$ 이다.

유제 4

$x = 0.3\dot{8}$ 일 때, $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x}}}$ 의 값을 소수로 나타내어라.

5 도전예제

원리탐구

양의 유리수 $\frac{2a}{735}$ 와 $\frac{a^2}{675}$ 이 모두 유한소수가 되는 가장 작은 자연수 a 를 구하여라.

풀이 답: 441

주어진 두 유리수의 분모를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\frac{2a}{735}=\frac{2a}{3\times5\times7^2},\ \frac{a^2}{675}=\frac{a^2}{3^3\times5^2}$$

이들이 모두 유한소수로 나타내어지므로, a 는 3×7^2 의 배수이고 동시에 3^2 의 배수이다.

자연수 a 의 가장 작은 값을 찾고 있으므로, a 는 3×7^2 과 3^2 의 최소공배수이다.

따라서 $a=3^2\times7^2=441$ 이다.

유제 5

분수 $\frac{9\times A}{390}$, $\frac{35\times A}{84}$ 를 소수로 나타내면 모두 유한 소수가 된다고 한다. 이를 만족하는 세 자리의 자연수 A 가 될 수 있는 수는 모두 몇 개인가?

종합문제

1. 임의의 수 x를 넣으면, 새로운 수 $\frac{1+x}{1-x}$가 나오는 어떤 기계가 있다.

이 기계에 $\{0.\dot{0}\dot{1},\ 0.\dot{0}\dot{2},\ 0.\dot{0}\dot{3},\ \cdots, 0.\dot{0}\dot{8},\ 0.\dot{0}\dot{9}\}$를 넣어서 나온 수 중 가장 작은 수를 구하여라.

2. 서로소인 두 자연수 m, n에 대하여 $1.0\dot{2}\times\frac{n}{m}=(0.\dot{2})^2$일 때, $m+n$의 값을 구하여라.

3. $\frac{7}{60}\times x$를 소수로 나타내면 유한소수 y가 된다. 이때, x값이 될 수 있는 가장 큰 한 자리 자연수와 유한소수 y를 곱한 값을 구하여라.(10보성)

4. 순환소수 $0.\dot{a}\dot{b}$ 와 분수 $\frac{8}{3}$ 의 곱은 순환소수 $0.\dot{b}\dot{a}$ 이고 두 순환소수 $0.\dot{a}\dot{b}$ 와 $0.\dot{b}\dot{a}$ 의 합은 1이다. 이 때, a, b 의 값을 구하여라.

5. 분수 $\frac{a}{60}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고, 기약분수로 나타내면 $\frac{19}{b}$ 이다. a가 세 자리의 자연수일 때, a가 될 수 있는 수를 모두 구하여라.

6. $80 \le x \le 90$이고, $\frac{x}{450}$는 소수로 나타내면 유한소수이고, 기약분수로 나타내면 $\frac{9}{y}$와 같을 때, $x-y$의 값을 구하여라.(10송파)

7. 서로소인 두 자연수 p와 q에 대하여 $1.\dot{8}\dot{1} \times p = 0.\dot{7} \times q$ 일 때, p, q 의 값을 구하여라.

8. $\frac{4567}{9900} = 0.ab\dot{c}\dot{d}$에 a, b, c, d는 $1, \cdots, 9$중 어느 한 수를 나타낸다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.(10송파)

9. 순환소수 $1.\dot{1}\dot{7} = 1.17171717\cdots$ 에 어떤 자연수를 곱하면 3의 배수가 된다. 이러한 자연수 중에서 가장 작은 수는 무엇인가?

10. $\dfrac{A}{880}$를 소수로 나타내면 소수점 아래 둘째자리에서 순환마디가 시작될 때 가장 작은 자연수 A의 값을 구하여라.

11. a와 b는 1 이상 9 이하의 자연수이고, $a<b$이다. 다음과 같이 정의된 세 순환소수에 대하여 $y-x$는 $y-z$의 몇 배인가?

$$x=0.\dot{a}\dot{b}=0.ababab\cdots,\quad y=0.\dot{b}\dot{a}=0.bababa\cdots,\quad z=0.b\dot{a}=0.baaa\cdots$$

12. 1보다 작은 기약분수 $\dfrac{11}{a}$을 소수로 나타내면 소수 첫째자리의 수가 6인 유한소수가 될 때, a의 값을 구하여라.

13. 두 순환소수 $0.\dot{a}2\dot{b}$ 와 $0.\dot{a}b\dot{2}$의 합이 $\dfrac{307}{333}$일 때, a, b의 값을 구하여라.
(단, a와 b는 한 자리 자연수이다.)

14. 분수 $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{100}$ 중에서, 유한소수가 아닌 순환소수가 되는 것은 모두 몇 개인가?

15. k는 100 이하의 자연수이고 $\dfrac{17k}{102}$가 정수가 아닌 유한 소수가 되는 k의 개수를 구하여라.

16. 분모와 분자의 합이 50 인 기약분수를 소수로 나타내어 소수점 아래 둘째 자리에서 반올림하였더니 0.3 이 되었다. 이러한 분수를 모두 구하여라.

17. $0.\dot{1}$과 $0.\dot{8}$사이의 수로 분모가 90인 분수를 소수로 나타내었을 때, 유한소수가 되는 것은 모두 몇 개인가?

18. 두 분수 $\frac{19}{114}$, $\frac{9}{140}$에 어떤 자연수 A를 각각 곱하여 모두 유한소수로 나타낼 수 있게 하려고 한다. 이 때, A가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

19. 어느 기약분수를 순환소수로 나타내는데 A는 분모를 잘못 보아 답이 $1.\dot{1}\dot{8}$이 되고 B는 분자를 잘못 보아 답이 $1.91\dot{6}$이 되었다 다음 물음에 답하여라.

(1) 이 분수를 구하여라.

(2) 이 분수를 순환소수로 나타내어라.

20. 분수 $\frac{a}{175}$를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 이 수를 기약분수로 나타내면 $\frac{b}{c}$가 된다고 한다. 이를 만족하는 자연수 a, b, c에 대하여 자연수 $a-b-c$의 최소값을 구하여라.

21. 분수 $\frac{3}{14}$을 소수를 고친 후 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 $f(n)$이라 할 때, 다음 물음에 답하여라.(단, $\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$이다.)

(1) $\frac{3}{14}$을 소수로 나타내어라.

(2) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(98)$의 값을 구하여라.

도전문제

1. a가 1에서 300까지 자연수일 때, 분수 $\dfrac{6}{2\times 5^3\times a}$을 소수로 나타내었을 때, 유한소수가 되게 하는 a의 개수와 a의 최대값을 구하여라.

2. 방정식 $a+b=120$을 만족시키는 자연수의 순서쌍$(a,\ b)$에 대하여 $\dfrac{b}{a}$가 자연수 또는 유한소수로 나타내어지는 것의 개수를 모두 구하여라.

3. $S=\dfrac{1}{10}+\dfrac{2}{100}+\dfrac{3}{1000}+\dfrac{4}{10000}+\cdots$ 일 때, S를 순환소수로 나타내어라.

[사고력 퀴즈와 퍼즐]

1. 순환소수의 순환마디의 최대의 개수

분수를 소수로 고치기 위해 나눗셈을 하면 언젠가는 나머지가 0 이 되는 경우 유한소수가 되고, 그렇지 않은 경우는 순환소수가 되다. 예를 들어 $\frac{3}{7}=0.428571428571\cdots$ 의 경우 $4, 2, 8, 5, 7, 1$ 이 되풀이 되어 순환마디가 6 인 순환소수라고 한다. 순환마디는 이처럼 가장 커봤자 분모보다 1 만큼 작다. 왜냐하면 어떤 자연수를 7 로 나누어 나누어떨어지지 않을 때, 나머지는 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 의 어느 하나이다. 그러므로 7 로 나눗셈을 몇 번 하다보면 같은 나머지가 나오게 된다. 그다음부터는 이전에 했던 계산이 되풀이 된다.

$\frac{3}{7}$ 의 예에서 나머지는 $2, 6, 4, 5, 1, 3\cdots$ 이 차례로 되풀이되어 나온다. 이것들은 모두 나누는 수보다 작다. 그러니 개수는 7 보다 작을 수 밖에 없다. 따라서 순환마디는 최대한 6 이다.

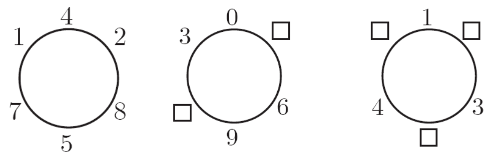
정리하자면 나눗셈을 하면 언젠가는 나머지가 0 이 되는 경우와 그렇지 않은 경우 두 가지밖에 없다. 그래서 분수를 소수로 고치면 유한소수, 아니면 순환소수일 수밖에 없다. 그렇다면 순환소수가 되는 경우, 몇 개의 숫자가 되풀이될까? 곧, 순환마디는 몇일까?

순환마디는 가장 커봤자 분모보다 1 만큼 작다.

다른 예를 들면 $\frac{211}{317}$ 의 경우 순환마디는 많아야 316 개이다.

2. 숫자 고리 만들기

두 기약분수 $\frac{1}{7}=0.142857142\cdots$, $\frac{2}{7}=0.285714285\cdots$의 순환마디를 숫자 고리로 나타내면 (그림 1)과 같다. 기약분수 $\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \cdots, \frac{12}{13}$를 소수로 나타낼 때, 순환마디는 두 종류의 숫자 고리 중 하나로 나타낼 수 있다. 두 개의 숫자 고리를 다음과 같이 나타낼 때, □안에 들어갈 숫자의 합을 구하여라.(10가락)



(그림 1)

[생활 속의 수학]

1. 암호문 만드는 방법

다음 보기는 소수 $0.3593\cdots$ 을 이용하여 영어 단어 $LOVE$ 를 암호문으로 만드는 방법이다.

보기

(1) 암호문으로 바꾸려는 영어 단어의 각 문자와 소수점 아래의 각 자리의 숫자를 다음과 같이 차례대로 대응시킨다.

$$\begin{array}{cccc} L & O & V & E \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 0.\,3 & 5 & 9 & 3\cdots \end{array}$$

(2) 주어진 문자를 영어 알파벳에서 다음과 같이 대응된 수만큼 뒤에 나오는 문자로 바꾼다.

① L은 L로부터 세 문자 뒤의 O로 바꾼다.

② O는 O로부터 다섯 문자 뒤의 T로 바꾼다.

③ V는 V의 아홉 문자 뒤의 문자로 보내야 하지만 그런 문자가 없으므로 Z 뒤의 문자를 A로 생각하여 E로 바꾼다.

(3) 만약 같은 숫자가 다시 나오면 다음과 같이 그 숫자에 그 숫자가 나타난 횟수를 곱한 수만큼 뒤의 문자를 선택한다.

④ E에 대응되는 3이 두 번째로 나오므로 E는 E로부터 여섯 문자 뒤의 K로 바꾼다.

(4) 이렇게 하여 $LOVE$의 암호문은 $OTEK$가 된다.

이와 같은 방법으로 $\frac{14}{111}$를 이용하여 만들어진 암호문이 $NCZJIYDZAGA$라고 할 때, 원래의 영어 단어를 구하여라.

[읽을거리]

1. 계산기를 이용하여 순환마디 찾기 (21p. 공학적 도구의 이용_중학교 수학2_지학사)

분수 $\frac{1}{n}$(n은 자연수) 중에서 소수로 나타내면 순환마디가 $(n-1)$개인 순환소수가 되는 경우가 있다. $\frac{1}{7}$도 소수로 나타내면 순환마디가 6개인 순환소수이며, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$을 각각 소수로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7},\ \ \frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4},\ \ \frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$$

$$\frac{4}{7}=0.\dot{5}7142\dot{8},\ \ \frac{5}{7}=0.\dot{7}1428\dot{5},\ \ \frac{6}{7}=0.\dot{8}5714\dot{2}$$

이때, 순환마디는 모두 여섯 개의 숫자 1,2,4,5,7,8로 되어 있으며 숫자의 배열만 다르다. 즉, 소수로 나타내면 소수점 아래의 몇 개의 숫자가 지나면 모두 142857이 반복된다.

이와 같은 성질을 갖는 분수로 $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{23}$, $\frac{1}{29}$, $\frac{1}{47}$ 등이 있다. 위의 성질을 이용하면 열두 자리 숫자까지만 표시되는 계산기로도 $\frac{1}{17}$의 순환마디를 모두 찾을 수 있다. $\frac{1}{17}$, $\frac{2}{17}$, $\frac{3}{17}$, $\cdots$ 을 계산기로 계산하여 순환마디가 겹치는 부분을 이용하여 16개의 숫자를 찾는다.

$$\frac{1}{17}=0.05882352941\cdots,\ \ \frac{7}{17}=0.41176470588\cdots$$

따라서 $\frac{1}{17}=0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$임을 알 수 있다.