

100 문제를 푸는 것보다 원리를 가르칩니다!
문제를 푸는 1가지

원리탐구 중등 수학

중1수학(상)

내신 대비 및 심화 문제 탐/구/편

Mathmatics The discovery of dharma

최 경 호 지음



홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이



원리탐구

MATHEMATICS

중1수학(상) 탐구 차례		
제 1장	소인수분해와 약수	3
제 2장	공약수와 공배수	25
제 3장	정수와 유리수	47
제 4장	정수와 유리수의 계산	69
제 5장	문자와 식	91
제 6장	일차 방정식	113
제 7장	일차 방정식의 활용	133
제 8장	일차함수	155
제 9장	일차함수의 그래프와 활용	177

읽을거리		
제 1장	1. 가드너의 소수에 관한 퀴즈	23
제 2장	1. 생존을 위한 매미의 선택, 소수!	45
제 3장	1. 한 뼘은 어디로 간 것일까?	67
제 4장	1. 여러 가지 숫자	89
제 5장	1. 문자와 기호는 왜 만들어졌을까?	111
제 6장	1. '대수학의 아버지' 알파리즈미	131
제 7장	1. 방정식을 다룬 옛 수학책	153
제 8장	1. 함수로 추정하는 옛날 사람들의 키는 어느 정도일까?	175
제 9장	1. 물세계 속에 숨어 있는 함수	198

제 1장 소인수분해와 약수



탐구예제

1 탐구예제



다음 물음에 답하여라.

(1) 제곱수를 이용하여 1이상 100이하의 소수를 모두 찾아라.

(2) 다음 수를 제곱수를 이용하여 소수와 합성수로 구별하여보아라.

- ① 97 ② 133 ③ 211

풀이 답: (1) 풀이참조 (2) ① 소수 ② 합성수 ③ 소수

합성수는 최소한 1과 자기 자신 이외의 두개의 수 이상의 곱으로 나타낼 수 있다.

즉, $6 = 2 \times 3$, $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3$ 과 같이 곱으로 나타 낼 수 있다.

따라서 제곱수(똑같은 두수의 곱으로 이루어진 수)

$4 = 2 \times 2 = 2^2$, $9 = 3 \times 3 = 3^2$, $16 = 4 \times 4 = 2^4$, $25 = 5 \times 5 = 5^2$, $36 = 6 \times 6 = 6^2$, $49 = 7 \times 7 = 7^2$,
 $64 = 8 \times 8 = 8^2$, $81 = 9 \times 9 = 9^2$, $100 = 10 \times 10 = 10^2$, $121 = 11 \times 11 = 11^2$, $144 = 12 \times 12 = 12^2$, ...

의 두개의 같은 수의 곱 중에서 하나보다 작은 소수로 나누어떨어지는가를 본다. 예를 들어 19은 $25 = 5 \times 5$ 보다 작으므로 5보다 작은 소수 2, 3로 나누어떨어지지 않으므로 소수이다. 91은 $100 = 10 \times 10$ 보다 작으므로 10보다 작은 소수 2, 3, 5, 7로 나누어 본다. $91 = 7 \times 13$ 이므로 합성수이다.

(1) 위와 같이 제곱수를 이용하여 소수를 찾으면 다음과 같다.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

(2) ① 97은 $100 = 10 \times 10$ 보다 작으므로 10보다 작은 소수 2, 3, 5, 7로 나누어 본다.

나누어떨어지지 않으므로 소수이다.

② 133는 $144 = 12 \times 12$ 보다 작으므로 12보다 작은 소수 2, 3, 5, 7, 11로 나누어 본다.

$133 = 7 \times 19$ 이므로 합성수이다.

③ 211는 $225 = 15 \times 15$ 보다 작으므로 15보다 작은 소수 2, 3, 5, 7, 11, 13로 나누어보면 나누어떨어지지 않으므로 소수이다.

유제 1

다음 물음에 답하여라.

(1) 제곱수를 이용하여 100이상 150이하의 소수를 모두 찾아라.

(2) 다음 수를 제곱수를 이용하여 소수와 합성수를 구별하여보아라.

- ① 71 ② 247 ③ 331 ④ 403

2 탐구예제



280 에서 다음을 구하여라.

- (1) 소인수분해 (2) 약수의 개수
- (3) 약수의 총합 (4) 약수의 총 곱

풀이 답: (1) $2^3 \times 5 \times 7$ (2) 16 (3) 720 (4) 280^8

(1) 280의 소인수 분해: $280 = 4 \times 7 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5 \times 7$ (2) 약수의 개수: 280의 약수 16개는 $(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7)$ 을 전개하여 나오는 각 항이므로 소인수분해하여 (지수+1)을 각각 곱하면 약수의 개수가 나옴을 알 수 있다.그러므로 $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$ 개다.(3) 약수의 총합: 위 (2)번에서 $(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7)$ 을 전개하여 나오는 각 항이 280의 약수이므로 모두 전개할 필요 없이 $(1+2+4+8)(1+5)(1+7) = 15 \times 6 \times 8 = 720$ 이다.(4) 약수의 총 곱: 최소의 약수와 최대의 약수의 곱, 두 번째 작은 약수와 두 번째 큰 약수의 곱 $\dots$, $1 \times 280 = 2 \times 140 = \dots = 14 \times 20$ 은 원래의 수 280임을 알 수 있다. 그러므로 약수의 총 곱은 280을 약수의 개수의 $\frac{1}{2}$ 개만큼 곱한 것임을 알 수 있다. 따라서 280^8 이다.

유제 2

180 에서 다음을 구하여라.

- (1) 소인수분해 (2) 약수의 개수
- (3) 약수의 총합 (4) 약수의 총 곱

3 탐구예제

90에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 90을 소인수분해 하여라.

(2) x 가 될 수 있는 크기를 순으로 작은 것부터 나열할 때, 가장 작은 수부터 차례로 3개를 구하여라.

풀이 답: (1) $2 \times 3^2 \times 5$ (2) 10, 40, 90

(1) $2 \times 3^2 \times 5$ (2) 자연수의 제곱이 되게 하려면 지수가 짝수가 되어야 한다. 따라서 $2 \times 3^2 \times 5$ 에 2×5 를 곱한 것이 가장 작고, 그 다음도 지수가 짝수가 되게 곱하여야 하므로 $2 \times 5 \times 2^2 = 40$, $2 \times 5 \times 3^2 = 90$ 이다. 따라서 크기순으로 나열하면 10, 40, 90이다.

유제 3

 $280 \times x = y^2$ 을 만족하는 x, y 중에서 가장 작은 수를 m, n 이라 할 때 $m+n$ 의 값을 구하여라.

4 탐구예제



자연수 a 에 대하여 $\langle a \rangle = (a \text{의 약수의 개수})$ 라고 할 때, $\langle a \rangle = 8$ 인 a 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

풀이 답: 24

$\langle a \rangle = (a \text{의 약수의 개수}) = 8$ 이므로 약수의 개수가 8인 자연수 a 를 찾는다.

자연수 A 가 $A = a^m \times b^n$ 으로 소인수분해 될 때, A 의 약수의 개수는 $(m+1) \times (n+1)$ 개임을 이용하면 $8 = 1 \times 8 = 7+1$, $8 = 2 \times 4 = (1+1) \times (3+1)$, $8 = 2 \times 2 \times 2 = (1+1) \times (1+1) \times (1+1)$ 이므로 가장 작은 자연수 a 는 2^7 , $2^3 \times 3$, $2 \times 3 \times 5$ 중에 있다.

이 중 가장 작은 수는 $2^3 \times 3 = 24$ 이다.

유제 4

약수가 12개인 가장 작은 자연수를 구하여라.

100 문제를 푸는 것보다 원리를 가르칩니다!

5 탐구예제



50개의 서랍에 1에서 50까지 번호가 붙어 있다. 50명의 학생이 첫 번째 학생은 서랍을 모두 열고, 두 번째 학생은 2의 배수의 서랍을 닫고, 세 번째 학생은 3의 배수인 번호의 서랍 중 열린 것은 닫고 닫힌 것은 열었으며, 네 번째 학생은 4의 배수인 번호의 서랍 중 열린 것은 닫고 닫힌 것은 열었다. 이와 같이 50번째 학생이 모두 서랍을 여닫기를 하였다. 다음 물음을 구하여라.

(1) 두 번만 여닫기가 된 서랍 수 (2) 5번째 학생이 닫은 서랍 수

(3) 50개의 서랍 중 마지막에 열려있는 것의 수

풀이 답: (1) 15개 (2) 6개 (3) 7개

(1) 두 번만 여닫기가 되었다는 것은 소수의 개수를 구하라는 뜻과 같다.

따라서 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 $\Rightarrow$ 15(개)이다.

(2) 5의 배수 중 5보다 작은 약수가 홀수 개 있어야 한다.

5, 20, 25, 30, 35, 40은 닫게 된다.

(3) 열려 있으려면 약수가 홀수 개 있어야 하는데 그 수는 완전제곱수이다. $1^2 \sim 7^2$ 7개이다.

유제 5

100에서 200까지 자연수 중에서 약수의 개수가 아래와 같은 수는 모두 몇 개인가?

(1) 홀수 개 (2) 3개

6 탐구예제



$50!$ (단, $10! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10$)에서 끝자리에 계속되는 0의 개수를 각각 구하여라.

풀이 답: 12개

10진법의 수를 곱하는 경우 $10 = 2 \times 5$ 이므로 2×5 의 개수가 오른쪽 끝자리에서 계속되는 0의 개수가 된다. 이 수의 인수 2의 개수는 많으므로 5의 개수를 세어보면 2×5 의 개수를 알 수 있다.

(i) 5의 배수의 경우 소인수분해 하였을 때 인수 5가 1개 존재한다. 그러므로 5의 배수는 10개이다.

(ii) 25의 배수의 경우 소인수분해 하였을 때 인수 5가 2개 존재하므로 한다. (i)에서 1개는 세었으므로 $25 = 5^2$ 의 배수는 5가 1개 더 있어 2개를 추가하여야 한다.

$\therefore$ 끝자리에 0이 $10 + 2 = 12$ 개가 계속된다.

유제 6

1부터 20까지 자연수의 곱을 P 라고 할 때 다음 물음에 답하여라.

(1) P 를 소인수 분해한 식은 $P = 2^a \times 3^b \times 5^c \times \dots \times 19$ 로 나타낼 때 a, b, c 를 구하여라.

(2) 곱 P 는 끝자리에서 연속하여 0이 몇 개나 생기는가?

100 문제를 푸는 것보다 원리를 가르칩니다!

7 탐구예제



다음 물음에 답하여라.

(1) 1287은 연속한 세 홀수의 곱이다. 이 연속한 세 홀수를 구하여라.

(2) 곱해서 144가 되고, 차가 10이 되는 두 자연수를 구하여라.

(3) 한 모서리의 길이가 1인 60개의 정육면체를 붙여서 겹넓이가 최소가 되는 직육면체를 만들려고 한다. 이 직육면체의 겹넓이를 구하여라.

풀이 답: (1) 9, 11, 13 (2) 8, 18 (3) 94

(1) $1287 = 9 \times 143 = 9 \times 11 \times 13$ 이므로 연속한 세 홀수는 9, 11, 13이다.

(2) $144 = 12 \times 12 = 3 \times 4 \times 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 8 \times 18$ 이므로 두 자연수는 8, 18이다.

(3) 한 변의 길이가 1인 정육면체 60개를 붙여서 직육면체를 만들려면 $60 = a \times b \times c$ 를 만족하는 자연수 a, b, c 가 존재해야 한다.

$$60 = 1 \times 1 \times 60 = 1 \times 2 \times 30 = 1 \times 3 \times 20 = 1 \times 4 \times 15 = 2 \times 2 \times 15$$

$= 2 \times 3 \times 10 = 2 \times 5 \times 6 = 3 \times 4 \times 5$ 이므로 직육면체 겹넓이의 값이 최소가 되는 경우는 직육면체의 세 모서리가 각각 3, 4, 5일 때이다. 따라서 구하는 최소값은 $(3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 3) \times 2 = 94$ 이다.

유제 7

다음 물음에 답하여라.

(1) 1320은 연속한 세 수의 곱이다. 이 연속한 세 수를 구하여라.

(2) 곱해서 252가 되고, 합이 32이 되는 두 자연수를 구하여라.

(3) 한 모서리의 길이가 1인 36개의 정육면체를 붙여서 겹넓이가 최소가 되는 직육면체를 만들려고 한다. 이 직육면체의 겹넓이를 구하여라.

종합문제

1. $2^4 \times \square$ 의 약수의 개수가 15개일 때, 다음 중 $\square$ 안의 수로 알맞은 것은?

(단, 2를 소인수로 가진 수는 제외)

- ① 4 ② 5 ③ 9 ④ 15 ⑤ 21

2. 자연수 x 를 소인수분해 했을 때, 나타나는 소인수들의 합을 기호 $S(x)$ 로 나타내기로 한다.(예, $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 이므로 $S(72) = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12$ 가 된다.) 다음을 구하여라.

(1) $S(96) + S(2000)$

(2) 어떤 자연수 m 을 소인수 분해하면 세 종류의 소인수가 나타나고, $S(m) = 13$ 인 m 의 값

3. 자연수 $N = 2^x \times 3^3 \times 5^y$ 의 약수의 개수는 80개이다. $x - y$ 의 값 중 가장 작은 값은?

- ① -10 ② -8 ③ -7 ④ -1 ⑤ +1

100 문제를 푸는 것보다 **원리**를 가르칩니다!

4. 다음 중에서 약수의 개수가 가장 많은 것은?

- ① 36 ② 17^2 ③ $2 \times 3 \times 5$ ④ $2^2 \times 3^5$ ⑤ $2 \times 3 \times 7^2$

5. 1에서 15까지 자연수의 곱 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 14 \times 15$ 를 십진수로 나타내면 끝자리에 계속되는 0의 개수를 구하여라.

6. 소인수가 3개인 자연수 중 5번째로 작은 수를 구하면?

- ① 120 ② 90 ③ 84 ④ 78 ⑤ 70

7. 540 을 가능한 한 작은 자연수로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다.
나누어야 할 자연수는?

- ① 5 ② 6 ③ 15 ④ 24 ⑤ 28

8. $125 \times 35 \times 256 \times (\quad)$ 이 식에서 곱셈 값의 마지막 다섯 숫자가 모두 0 이 되게 하려면 ()안에 써넣을 수 있는 가장 작은 수는 얼마인가?

9. 자연수 a 의 약수의 개수를 $n(a)$ 로 나타낼 때, $n(10) + n(50) + n(100)$ 의 값을 구하면?

- ① 11개 ② 13개 ③ 15개 ④ 17개 ⑤ 19개

100 문제를 푸는 것보다 **원리**를 가르칩니다!

10. $0.1mm$ 두께의 신문지를 반으로 접고, 그것을 다시 반듯하게 반으로 접는다. 그리고 또 반으로... 이렇게 50 번을 접었을 때 두께는 어느 정도 될까?(단, $2^{10} \approx 1000$ 으로 계산함)

11. $30 \times 31 \times 32 \times \cdots \times 98 \times 99$ 는 5^n 으로 나누어떨어진다. 가장 큰 자연수 n 의 값을 구하여라.

12. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \times 10$ 의 약수의 개수를 구하면?

- ① 135개 ② 270개 ③ 512개 ④ 540개 ⑤ 1024개

16. 다음 중 360 의 약수가 아닌 것은?

- ① $2^3 \times 3$ ② $2^3 \times 5$ ③ $2 \times 3 \times 5^2$ ④ $2^3 \times 3 \times 5$ ⑤ $2 \times 3^2 \times 5$

17. 자기 자신을 제외한 나머지 약수를 모두 더하여 자기 자신이 되는 수를 ‘완전수’라고 한다. 이와 같은 ‘완전수’를 모두 고르면?(정답 2 개)

- ① 6 ② 15 ③ 28 ④ 36 ⑤ 48

18. 60 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이 때, 곱해야 할 자연수로 옳지 않은 것은?

- ① 12 ② 15 ③ 60 ④ 135 ⑤ 375

13. $25^{16} \times 2^{38}$ 은 몇 자리 수인가?

14. 자연수 a 의 약수의 개수를 $f(a)$ 라고 나타낼 때, $f(120) \times f(x) = 96$ 을 만족하는 가장 작은 수 x 를 구하여라.

15. 220의 모든 약수의 합을 구하여라.

탐구문제

1. a, b, c 가 자연수 일 때, $24a = 90b = c^2$ 을 만족하는 c 중에서 최소값을 구하여라.

2. 1 부터 200 까지 번호가 붙은 200 개의 전구가 있다. 모든 전구가 꺼진 상태에서 다음 조작을 순서대로 시행한다.

- (1) 2 의 배수의 번호가 붙은 전구는 켜다.
- (2) 3 의 배수의 번호가 붙은 전구를 켜진 것은 끄고, 꺼진 것은 켜다.
- (3) 4 의 배수의 번호가 붙은 전구를 켜진 것은 끄고, 꺼진 것은 켜다.

이렇게 조작한 뒤에 켜져 있는 전구는 모두 몇 개인가?

19. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ① 소수는 무한히 많다. ② 합성수의 약수는 3 개다.
- ③ 20 보다 작은 소수는 9 개 있다.
- ④ 모두 자연수는 소수들의 곱으로 나타낼 수 있다.
- ⑤ 2 는 유일한 짝수인 소수이다.

20. 1 부터 99 까지 모든 자연수를 곱하면 $a \times 10^n$ 의 꼴이 된다고 한다. 이 때, n 의 값을 구하여라. (단, a 는 10 의 배수가 아니다.)

[사고력퀴즈와 퍼즐]

1. 다음과 같은 규칙으로 빈 사각형 안에 주어진 수를 써넣어라.
2, 3, 4, 5, 8, 25 넣기(힌트: 3, 25 을 찾는다.)

[규칙]

① 사각형의 오른쪽에 있는 점선 안의 수는 가로줄에 있는 칸의 수의 곱을 나타낸다.
② 사각형의 아래쪽에 있는 점선 안의 수는 세로줄에 있는 칸의 수의 곱을 나타낸다.
③ 주어진 수는 한번 씩만 들어간다. 따라서 주어진 수를 꼭 확인하여야 한다.

			150
			160
10	100		

3. 홀수의 숫자로 이루어진 $1! + 3! + 5! + 7! + \dots + 29!$ 에서 다음을 구하여라.
(단, $9! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9$)
- (1) 1의 자리의 숫자 (2) 10의 자리의 숫자

4. $2^2 \times \square$ 의 약수의 개수가 18일 때, 이를 만족하는 자연수 $\square$ 의 값을 작은 순서대로 3개 구하여라. (단, $\square$ 안의 값은 2 이상의 모든 정수 가능)

[생활 속의 수학]

1. 분수와 빵 나누기

크기가 같은 빵 7개를 8명의 학생이 공평하게 나누어 먹으려고 한다. 다음 물음에 답하라.

(1) $\frac{7}{8}$ 을 3개의 단위분수의 합으로 나타내어라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 빵 7개를 8등분하는 방법을 설명하여라.

100 문제를 푸는 것보다 원리를 가르칩니다!

[읽을거리]

1. 가드너의 소수에 관한 퀴즈

1977년 8월, 마틴 가드너는 암호문 제작에 이용된 아래와 같은 긴 공개 열쇠를 공개했어요. 그리고 이 공개 열쇠를 해독하는 퀴즈를 냈답니다.

다음 수를 소인수 분해 하시오.

114, 381, 625, 757, 888, 867, 669, 235, 779, 976, 146, 612, 010, 218, 296, 721,

242, 362, 562, 561, 842, 935, 706, 935, 245, 733, 897, 830, 597, 123, 563,

958, 705, 058, 989, 075, 147, 599, 290, 026, 879, 543, 541

위의 긴 숫자를 두 개의 소수로 소인수 분해해서 암호문을 해독해야 하는 이 퀴즈에는 아주 많은 현상금이 걸렸죠.

가드너가 이 긴 공개 열쇠를 잡지에 실은 지 무려 17년이 지난 1994년 4월 26일, 드디어 600명의 자원자로 이루어진 팀에서 위 숫자의 소인수를 발견했어요.

3, 490, 529, 510, 847, 652, 949, 147, 849, 619, 903, 898, 133, 417, 764, 638, 493, 387, 843, 990, 820, 577과

32, 769, 132, 993, 266, 709, 549, 961, 988, 190, 834, 461, 413, 177, 642967992, 942, 539, 798, 288, 533였습시다.

이 값을 개인 열쇠로 사용해서 푼 암호문은 일련의 숫자였는데, 이를 문자로 전환하자 다음과 같은 메시지가 나왔어요.

그것은 바로 “The magic words are squeamish ossifrage(마술의 단어는 까탈스러운 수염수리)” 였습니다.

600명이라는 많은 사람이 동시에 작업을 해서 이 복잡한 문제를 해결하기까지 17년씩이나 걸렸어요. 이 사건을 계기로 아무리 어려운 암호라 할지라도 결국에는 깨진다는 것을 알게 된 것이죠. 퀴즈에 사용된 숫자는 인간에게 길어 보이지만 컴퓨터에게는 다소 작을 수 있다는 사실을 잊지 마세요.

중요한 정보에 대한 보안성을 높이기 위해서는 이보다 훨씬 큰 숫자를 사용해요. 보통 사용되는 공개 열쇠의 값은 비밀 열쇠인 두 소수를 찾을 때 지구상에 있는 모든 컴퓨터가 동시에 작동한다 하더라도 우주 역사보다 더 긴 시간이 걸리는 숫자들이랍니다.

한편 1994년 피터 쇼우어라는 사람이 이 RSA암호를 해독하는 방법을 발견했답니다. 그러나 이 방법은 지금의 컴퓨터를 사용한 것이 아니라 미래의 양자 컴퓨터를 이용해야 해결할 수 있었어요. 앞으로 양자 컴퓨터가 개발되면 RSA암호는 쓸모없게 될 것입니다. 여러분이 이미 알고 있어서 쉽게 해결할 수 있는 시저 암호처럼 말이죠. 그러나 아직 양자 컴퓨터가 완벽하게 만들어지지 않았으니 현재는 염려 없이 RSA암호를 사용해도 되겠죠?

(출전: 놀이로 풀어보는 암호 세상2, 한선관·이철현 지음, 이치사이언스)