

100 문제를 푸는 것보다
문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

원리탐구 중등수학 중1 수학(상)

최상위권 학생을 위한 고난이도 문제 **도/전/편**

The discovery of dharma Series Challenge 최 경 호 지음

 홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이



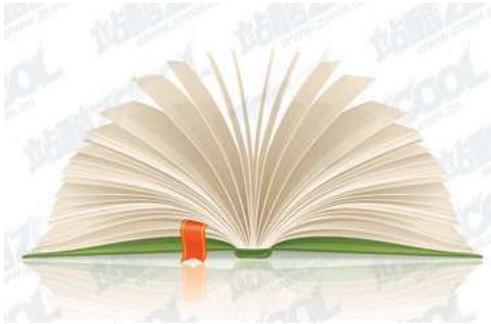
MATHEMATICS


원리탐구

중1수학(상) 도전 차례		
제 1장	자연수의 성질A	3
제 2장	자연수의 성질B	25
제 3장	정수와 유리수A	47
제 4장	정수와 유리수B	69
제 5장	문자와 식과 일차방정식	89
제 6장	일차방정식의 활용	111
제 7장	일차함수	131
제 8장	일차함수의 활용	153

생활 속의 수학		읽을거리
제 1장	1. 전쟁에서 병사 수 빨리 세기	1. 진화 수
제 2장	1. 십간십이지(十干十二支)	1. 매미가 태어나는 주기가 소수 년인 이유
제 3장	1. 사과를 연속해서 쌓기	1. 프랑스 오베르뉴 지방의 농민들의 오구단(?)
제 4장	1. 미래의 달력 알아내기	1. 수는 어떻게 만들어졌을까?
제 5장	1. 생각한 수는 수 알아맞히기	1. 수학에서 기호 사용의 의의
제 6장	1. '원리 상회' 에서 사과 한 개의 값은 몇 원인가?	1. "구장산술" 의 방정장(方程式) 2. 섭씨온도와 화씨온도
제 7장	1. 영화를 보면서 파자를 먹을 때의 그래프	1. 이 세상은 함수로 가득하다.
제 8장	1. 우주 정거장에 언제 도착할까?	1. 아파트에서 가장 시끄러운 층을 알아내는 함수

제 1장 자연수의 성질A



도전예제



1 도전예제

720에서 다음을 구하여라.

- (1) 소인수 분해 (2) 약수의 개수 (3) 약수 중 제곱수의 개수
- (4) 720에 얼마를 더 곱하면 어떤 자연수 x 의 제곱이 되게 하는 가장 작은 자연수 y 의 값
- (5) $\frac{720}{n}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 값들의 합
- (6) 720의 모든 약수의 곱을 720의 거듭제곱으로 나타내어라.

풀이 답: (1) $2^4 \times 3^2 \times 5$ (2) 30 (3) 6 (4) 5 (5) 2418 (6) 720^{15}

- (1) $2^4 \times 3^2 \times 5$
- (2) $(4+1)(2+1)(1+1) = 30$
- (3) 약수가 제곱이 되려면 5를 소인수로 가지면 안 되고 지수가 2의 배수가 되어야 한다. $2^4 \times 3^2 = (2^2 \times 3)^2$ 이므로 약수중 제곱수의 개수는 $2^2 \times 3$ 의 약수의 개수인 $(2+1)(1+1) = 6$ 이다.
- (4) 제곱이 되려면 지수가 모두 짝수가 되어야하므로 5를 곱해야 한다.
- (5) 720의 약수의 합을 구하는 것과 같으므로 $(1+2+4+8+16)(1+3+9)(1+5) = 2418$ 이다.
- (6) 약수가 30개 이므로 가장 큰 약수와 가장 큰 약수의 곱이 720이고 그 다음 수의 곱도 720이므로 720을 15번(약수 개수의 반) 곱한 것과 같다. $\therefore 720^{15}$

유제 1

24의 모든 약수의 곱이 $2^a \times 3^b$ 의 꼴로 나타내어질 때 a, b 를 구하여라.

2 도전예제



가로, 세로, 높이가 각각 36cm, 48cm, 60cm인 직육면체 모양의 나무토막이 있다. 이것을 남은 부분이 없이 가능한 한 큰 정육면체 모양의 나무토막으로 자르려고 한다. 다음을 구하여라.

- (1) 이 때, 정육면체 모양의 나무토막의 한 모서리의 길이
- (2) 정육면체 모양의 나무토막의 개수

풀이 답: (1) 12cm (2) 60개

- (1) 가능한 한 큰 정육면체 모양의 나무토막을 만들려면 정육면체의 한 모서리의 길이는 36, 48, 60의 최대공약수가 되어야 한다.
이 때, $36 = 2^2 \times 3^2$, $48 = 2^4 \times 3$, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로 36, 48, 60의 최대공약수는 $2^2 \times 3 = 12$
따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는 12cm로 하면 된다.
- (2) $(36 \div 12) \times (48 \div 12) \times (60 \div 12) = 3 \times 4 \times 5 = 60$ (개)

유제 2

세 모서리의 길이가 각각 8cm, 12cm, 16cm인 직육면체를 쌓아서 부피가 가장 작은 정육면체를 만들려고 할 때, 다음을 구하여라.

- (1) 정육면체 한 변의 길이 (2) 필요한 벽돌 수

3 도전예제



약수가 12 개인 가장 작은 자연수를 구하여라.

풀이 답: 60

12 = 2 × 6 ⇒ 2⁵ × 3 = 96, 12 = 3 × 4 ⇒ 2³ × 3² = 72, 12 = 3 × 2 × 2 ⇒ 2² × 3 × 5 = 60
따라서 셋 중에 가장 작은 자연수는 60이다.

유제 3
약수가 20 개인 자연수 중에서 가장 작은 것은 무엇인가?

4 도전예제



오늘이 수요일이라고 하면, x 일 후는 일요일, y 일 후는 화요일이 된다.

다음은 어떤 요일인가?

- (1) x+2y 일 후 (2) 2x 일 전

풀이 답: (1) 금요일 (2) 화요일

- (1) x = 7k + 4, y = 7k' + 6 이므로 x + 2y = 7k + 4 + 2(7k' + 6) = 7(k + 2k' + 2) + 2이다.
∴ 수요일의 2일 후는 금요일이다.
- (2) 2x = 2(7k + 4) = 7(2k + 1) + 1 이므로 수요일의 1일 전은 화요일이다.

유제 4
두 자연수 a 와 b 를 9 로 나눈 나머지가 각각 6 과 7 이라고 한다. a + b 를 9 로 나누었을 때의 나머지는 얼마인가?

5 도전예제



443, 347, 123 인 세 수를 각각 어떤 수로 나누었더니 나머지가 같았다. 이 나누는 수의 최댓값과 나머지를 구하여라.

풀이 답: 최댓값: 32, 나머지: 27

443 = Ax + r, 347 = Ay + r, 123 = Az + r 이라하면, 443 - 347 = 96 = A(x - y), 347 - 123 = 224 = A(y - z) 이므로 A는 96과 224의 공약수이다. 최대공약수는 32이고 나머지는 27이다.

유제 5

1059, 1417, 2312 를 어떤 수로 나누었을 때 나머지가 모두 같았다면, 어떤 수와 나머지를 구하여라.

6 도전예제



합이 96 이고, 최대공약수가 12 인 두 수가 있다. 이 두 수의 쌍을 모두 구하여라.

풀이 답: (12, 84), (36, 60)

최대공약수가 12이므로 A = 12a, B = 12b, (a, b는 서로소)라고 하면, A + B = 12a + 12b = 12(a + b) = 96, a + b = 8 이다.

(i) a = 1, b = 7일 때, A = 12, B = 84 (ii) a = 3, b = 5일 때, A = 36, B = 60 따라서 두수의 쌍 (A, B) = (12, 84), (36, 60)이다.

유제 6

다음을 만족시키는 두 자연수 a와 b에 대하여 a+b의 값이 가장 작을 때, a와 b의 차는 얼마인가?

a와 b의 최대공약수는 12 이고 a와 b의 최소공배수는 360 이다.

종합문제

100 문제를 푸는 것보다 원리를 가르칩니다!

4. p 는 소수이고 $p^2 + 2787 \times p$ 는 제곱수일 때, p 의 값을 구하여라.

5. 1에서 9까지 자연수 중에서 세 수를 뽑아 $0.\square\square\square$ 와 같이 소수 셋째 자리까지 있는 여러 가지 소수를 만들었다. 이와 같은 소수 중 기약분수로 나타내었을 때, 분모와 분자의 합이 가장 작은 소수의 1000배는 얼마인가?

6. 연속된 세 홀수의 곱은 3으로 나누어떨어짐을 증명하여라.

1. 어떤 두 수의 곱이 432 이고, 두 수의 최소공배수는 36 이다. 이 두 수의 공약수를 모두 써라.

2. 다음 분수 중에서 약분하였을 때, 분자가 1 이 되는 분수들의 합을 구하여라.

$$\frac{2}{72}, \frac{3}{72}, \frac{4}{72}, \frac{5}{72}, \dots, \frac{69}{72}, \frac{70}{72}, \frac{71}{72}$$

3. 자연수 x 를 소인수분해 했을 때, 나타나는 소인수들의 합을 기호 $S(x)$ 로 나타내기로 한다.(예, $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 이므로 $S(72) = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12$ 가 된다.) 다음을 구하여라.

(1) $S(96) + S(2000)$

(2) 어떤 자연수 m 을 소인수 분해하면 세 종류의 소인수가 나타나고, $S(m) = 13$ 인 m 의 값

7. 100에서 200까지 수를 적은 카드가 있다. 이 카드를 7로 나눈 나머지에 따라 나머지가 0은 A, 1은 B, 2는 C, 3은 D, 4는 E, 5는 F, 6은 G에 각각 넣기로 하였다. 다음을 구하여라.

(1) C, F에 들어있는 카드를 각각 한 장 꺼내어 적힌 수를 합하면 어디에 넣을까?

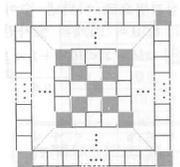
(2) D, G에 들어있는 카드를 각각 한 장 꺼내어 적힌 수를 곱하면 어디에 넣을까?

8. 48을 자연수 N으로 나누면 몫과 나머지가 같게 될 때, 다음을 구하여라.

(1) 몫과 나머지를 r이라 하면 $48 = \square \times \square + \square$ 이다.

(2) (1)을 만족하는 모든 N을 구하여라.

9. 그림과 같이 크기가 같은 정사각형 타일로 덮여진 마루가 있다. 마루의 두 대각선은 청색 타일이고, 그 외는 모두 흰색타일이다. 청색타일이 93개 일 때 이 마루를 덮고 있는 흰색타일의 총 개수를 구하여라.



100 문제를 풀는 것보다 원리를 가르칩니다!

10. 집합 $X = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ 일 때, X의 임의의 원소 x에 대하여

$f(x) = (x \text{의 양의 약수의 개수})$ 로 정할 때, 다음 집합의 원소의 개수를 구하여라.

- (1) $\{x|f(x) = 2\}$ (2) $\{x|f(x) = 3\}$ (3) $\{x|f(x) = (\text{홀수})\}$

11. $S = 1! + 2! + 3! + \dots + 2014!$ 일 때, S를 15로 나눈 나머지는 얼마인가?

(단, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ 이다.)

12. 100보다 큰 자연수 중에서 17로 나눌 때의 몫과 나머지가 같은 수는 모두 몇 개인가?

13. 3^7 을 연속하는 세 홀수의 합으로 나타낼 때, 세 홀수 중 가장 작은 수는 얼마인가?

14. 어떤 중학교 1학년 여학생의 수는 115명이고, 남학생의 수는 128명이다. 이들을 여학생, 남학생 별로 각각 여러 줄로 세우면서 한 줄로 세운 학생 수를 남녀 모두 같게 하였더니, 여학생은 7명, 남학생은 2명이 남았다. 한 줄에 세운 최대 인원수는 얼마인가?

15. 1부터 m 까지 모든 자연수를 곱한 결과를 12로 여러 번 나누었더니 몫이 1925가 되었다. 즉, 다음과 같았다.

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m}{12 \times \dots \times 12} = 1925$$

이것을 만족하는 가장 작은 자연수 m 은 얼마인가?

16. 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 과 $g(n)$ 을 다음과 같이 약속한다.

$f(n)$ 은 n 을 5로 나누었을 때의 나머지
 $g(n)$ 은 n 을 7로 나누었을 때의 나머지

$f(n) \times g(n)$ 을 최대로 하는 n 중에서 최소값은 얼마인가?

17. 약수가 24개인 수 중에서 가장 작은 수는 얼마인가?

18. 다음 식을 만족시키는 두 소수 p 와 q 의 합은 얼마인가?

$$p^2 + q^4 = 2225$$

도전문제

1. 다음을 구하여라.

- (1) 51^{50} 을 26 으로 나눈 나머지 (2) 929^{10} 을 3 로 나눈 나머지

- (3) 25^{352} 을 7 로 나눈 나머지 (4) 5^{2015} 을 1000 으로 나눌 때, 나머지

2. 9 를 829 개 붙여 이루어진 수에서 6 를 98 개 붙여 이루어진 수를 뺀 수

$$\underbrace{999 \cdots 99}_{829 \text{ 개}} - \underbrace{666 \cdots 66}_{98 \text{ 개}} \text{ 을 } 7 \text{ 로 나눈 나머지를 구하여라.}$$

19. 아래 계산에서 다음을 구하여라.

$$1! + 2! + 3! + \cdots + n! + \cdots + 2014! \text{ (단, } 10! = 10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 2 \times 1 \text{)}$$

- (1) 1 의 자리 숫자 (2) 10 의 자리 숫자

20. 어떤 자연수가 있는데, 그것으로 63, 91, 129 를 나누어 얻은 세 나머지의 합이 25 이다. 이 자연수를 구하여라.

21. 십진법으로 나타낸 자연수 n 의 각 자리의 수 중에서 홀수의 합을 $p(n)$ 이라 하자. 예를 들면, $p(1234) = 1 + 3 = 4$ 이다. 이 때, $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(98) + p(99)$ 의 값은 얼마인가?

3. n 이 자연수일 때, $\frac{3n+25}{2n-5}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 n 의 값을 모두 합하면 얼마인가?

4. 처음 10장의 종이에서 몇 장을 택하여 각각을 10장의 조각으로 자른 다음 다시 이들 중 몇 장을 택하여 각각 10장으로 자른다. 이런 작업을 몇 번 반복한 후 만들어진 종이 조각의 개수를 9로 나눌 때, 나머지를 구하여라.

100 문제를 푸는 것보다 **원리**를 가르칩니다!

5. $\frac{n-13}{5n+6}$ 가 약분이 되도록 하는 가장 작은 양의 정수 n 의 값을 구하여라.

6. 다음과 같이 모든 자리의 수가 6인 2013자리 수를 39로 나눌 때의 나머지는 얼마인가?

$$\underbrace{666 \cdots 66}_{2013\text{개}} \div 39$$

7. 숫자를 알아맞히는 게임을 하는데, 친구에게 각 자리 숫자가 모두 다른 세 자리 자연수를 생각하게 하고, 그 수와 그 수의 각 자리 숫자의 순서를 거꾸로 만든 수의 차 a 를 구하게 한다. 만일 a 가 두 자리 수이면 백의 자리 숫자를 0으로 둔다. 이때, a 의 각 자리 숫자의 순서를 거꾸로 하여 만든 자연수를 b 라 하자. 친구에게 $a+b$ 를 구하게 하면, 그 값은 항상 맞힐 수 있다. 그 값을 구하여라.

8. $x=5^{23}+1$, $y=2^{27}+1$ 일 때, xy 는 십진법으로 몇 자리 수인가?

[사고력퀴즈와 퍼즐]

1. 1부터 16까지 자연수를 적당히 한 줄로 늘어놓아 서로 이웃하는 두 수의 합이 모두 어떤 수의 제곱이 되도록 하였다. 양쪽 끝에 놓이는 두 수의 곱은 얼마인가?

[생활 속의 수학]

1. 전쟁에서 병사 수 빨리 세기

전쟁에서 병사 수 빨리 세기 위하여 수돌이는 다음과 같이 명령하였다. 아래의 사실로 보아 병사 수는 몇 명인가?(단, 병사 수는 300명에서 400명 사이이다.)

- (i) 5명씩 짝을 지어보아라. 짝을 짓지 못한 사람은 몇 명인가?
짝을 짓지 못한 사람이 1명입니다.
- (ii) 7명씩 짝을 지어보아라. 짝을 짓지 못한 사람은 몇 명인가?
짝을 짓지 못한 사람이 3명입니다.
- (iii) 11명씩 짝을 지어보아라. 짝을 짓지 못한 사람은 몇 명인가?
짝을 짓지 못한 사람이 3명입니다.

[읽을거리]

1. 친화 수

진약수의 합이 서로 엇갈리면서 같아지는 한 쌍의 수를 '친화수(amicable number)' 라고 한다. 대표적인 친화수의 예는 220과 284로, 220에서 자기 자신을 제외한 약수를 모두 더하면 284가 되고, 역으로 284에서 자기 자신을 제외한 약수를 모두 더하면 220이 된다.

〈성경〉의 〈창세기〉 32장에는 야곱이 형 에서를 위해 염소와 양을 보냈는데 그 수가 각각 220마리라고 적혀 있다. 또한 성경의 〈느헤미야〉 11장에는 “거룩한 성에 레위 사람의 도합이 284명이었느니라” 라는 내용이 있다. 여기서 220과 284는 우연히 아니라 의도적인 선택일 가능성이 높다.

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

(284의 자기 자신을 제외한 약수들의 합)

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

(220의 자기 자신을 제외한 약수들의 합)

친화수가 되는 수를 조사해보면 (1184, 1210), (2620, 2924), (12285, 14595)와 같이 짝수끼리 혹은 홀수끼리의 쌍이 된다. 피타고라스학파는 짝수가 여성, 홀수가 남성을 나타낸다고 보았기 때문에 친화수는 동성인 수가 되며, 우정을 상징하는 수로 알려져 있다. 그런 의미에서 친화수는 '친구수' 혹은 '우애수' 라 불리기도 한다.

[출전: 박경미 지음, 수학비타민, 김영사]