100 문제를 푸는 것보다
문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

중1 · 중2 수학적 사고 시스템 및 이론 확립

스토리텔링 · 영재교육원 · 국제중 대비서

수학 원리 탐구 Ⅱ 상

Mathematics
the Discovery of Dharma series Ⅱ
중등 탐구편

원리탐구

홈페이지(www.m1239.com)동영상 강의 및 풀이

차 례

신판을 내면서

2005년부터 펴내기 시작한 원리탐구 시리즈를 이번 신판을 내면서 대상학생에 맞게 구성체제를 바꾸었으며, 시대의 변화에 맞추어 전면적인 내용의 보강과 변화를 하였습니다.
첫째, 기존의 원리탐구 시리즈 Ⅰ·Ⅱ·Ⅲ·Ⅳ·Ⅴ·Ⅵ의 6권 체제를 수학 원리탐구 5권과 도전 원리탐구 4권, 총 9권으로 대상학생에 맞게 개편하였습니다.
수학 원리탐구 5권(Ⅰ·Ⅱ·Ⅲ·Ⅳ·Ⅴ)은 기존의 수학 원리탐구 Ⅲ·Ⅳ·Ⅴ·Ⅵ의 내용의 보강과 변화를 하여 수학 원리탐구Ⅰ·Ⅱ·Ⅲ·Ⅳ로 하였고, 초등학교 저학년을 위한 원리탐구Ⅴ를 새롭게 추가 하였습니다. 기존의 수학 원리탐구Ⅰ·Ⅱ는 도전 원리탐구 $A \cdot B \cdot C \cdot D$로 바뀌었습니다.
공부대상은 신판 수학 원리탐구Ⅰ·Ⅱ·Ⅲ·Ⅳ·Ⅴ는 초·중학생의 수학적 사고 시스템과 이론 확립에, 도전 원리탐구 $A \cdot B \cdot C \cdot D$는 중·고등학생의 수학적사고력 및 이론 확립에 중점을 두었습니다. 따라서 고등학교에서 문과를 지망하는 학생은 신판 수학 원리탐구Ⅰ·Ⅱ·Ⅲ·Ⅳ·Ⅴ까지 공부하면 되고, 특목고 및 이과 지망생은 도전 원리탐구 $A \cdot B \cdot C \cdot D$를 공부하면 됩니다.
둘째, 신판 수학 원리탐구 Ⅲ·Ⅳ는 구판 수학 원리탐구Ⅴ·Ⅵ의 내용과 편제를 거의 전면적으로 바꾸고 난이도도 약간 높였으며 쪽수를 수학 원리탐구 Ⅳ는 30여 쪽, 수학 원리탐구Ⅲ은 60여 쪽이 증가하였습니다. 수학 원리탐구Ⅰ·Ⅱ는 기초적이고 쉬운 내용은 원리탐구 Ⅱ·Ⅲ으로 옮기고 높은 난이도의 문제를 추가하였습니다.
처음 약속한 바와 같이 앞으로 질 높은 강의와 더 많은 노력을 통하여 더욱 이해하기 쉽고, 재미있는 수학 원리탐구가 될 수 있도록 계속적으로 보완·교정해 나갈 것을 약속드립니다. 이 책을 쓰는데 많은 도움을 주신 안 용태, 고 승진, 문 원기 선생님께 감사의 마음을 전합니다.

2009년 8월 저자 최 경호

재 개정판을 내면서

2010년에 개정 한 원리탐구Ⅱ를 7강 ***식 세우기 문제를 대폭추가***하고 일부 내용을 추가, 삭제 하여 유용한 수학 원리학습을 할 수 있도록 하였습니다. 앞으로도 계속하여 더 재미있고 유용한 책이 되도록 하겠습니다.

2013년 8월 저자 최 경호

서 문

1. **수학 원리탐구시리즈를** 펴내며

제가 수학강의를 한 지 벌써 10여년이 흘렀습니다. 강의 현장에서 수학을 가르치다보면 우리 학생들의 수학적 능력이 너무나 뛰어나다는 것을 알고 많이 놀랐습니다. 그러나 한편 학년이 높을수록 그 능력이 떨어진다는 것을 알고 또한 놀랐습니다. 그 이유를 분석해보니 공부방법과 습관이 잘 못됐다는 것을 알았습니다. 공부는 철저히 학생본인이 해야 하고 선생님은 길잡이 내지는 최후의 해결사(?)가 되어야 하며 공부는 공식이 중요한 것이 아니고 공식이 나오는 과정이 중요하며 공식이전에 가장 기본이 되는 원리의 이해가 중요하다는 생각을 가지게 되었습니다. 따라서 원리에 대한 이해와 공식이 나오는 과정에 대한 논리적 설명을 바탕으로 하는 강의가 아직 어리지만 명석한 학생들에게는 빠른 기간에 놀랄 만한 실력의 향상을 이룰 수 있었으며, 조금 느리다고 생각되는 학생들은 반복적인 수업을 통해 조금은 더디지만 많은 발전을 하는 것을 보았습니다.

또한 학교 수학책이 그 단계에만 필요한 지식들로 구성되어 있어서 하나의 원리나 내용이 초등학교에서 고등학교까지 적용됨에도 그 학년(단계)에 국한되어 있어서 통합적인 공부가 되지 못하고 심도 깊은 관련문제를 다룰 수 없어 학습의 효율성이 떨어지는 폐단이 있음을 알았습니다. 이를 없애고자 가능한 한 관련된 원리와 내용을 통합한 강의로 짧은 시간에 관련 내용을 종합하여 이해시키려했고, 따라서 심화문제와 응용문제를 일관되게 가르치다보니 이해가 매우 빨랐습니다. 이 처럼 제 나름대로의 교육방식을 적용하면서 흥미로운 변화를 목격할 수가 있었습니다. 저와 공부하는 기간이 길수록, 학년이 낮을수록(약 초4～6학년)학습능력이 뛰어남을 깨달았으며 남보다 공부시간이 적음에도 각종 경시대회에서 두각을 나타내고 영재센터에 합격생이 많음에 용기를 얻어 책을 써야겠다고 감히 마음먹었습니다.

처음에 국내 책 중에서 저의 교육방식과 내용에 맞는 책을 선택하여 강의하려 했으나 찾지 못하였습니다. 그래서 저의 강의방법과 내용에 가장 가까운 책이 중국 사천대(四川大)에서 쓴 数学奥林匹克初级读本이였습니다. 이 책을 몇 년 강의를 하면서 여러 오류와 원리에 대한 설명이 좀 부족함을 알게 되었습니다. 따라서 그동안 10여년에 걸친 강의 경험을 통하여 학생들에게 필요한 **기본적인 원리와 증명을 강화하고 공식이 나오는 과정을 철저히 연구하여 창의력과 논리력의 향상에 기본 초점**을 맞추고, 아울러 원리의 이해가 어려운 문제를 쉽게 풀리게 하고 현실에도 적용됨을 일깨워 수학에 흥미를 느낄 수 있도록 배려하여 이 책을 쓰게 되었습니다. 이 책이 **수리논술·구술에 도움이 되고 영재센터와 *KMO*등의 올림피아드와 특목고, 국제중 입시**에 활용 되도록 썼으므로 특히 **수학의 기본 원리서**로 자리 잡을 수 있기를 기대합니다.

2. 수학 원리탐구의 효용성과 중점내용

(1) 원리탐구의 효용성

① 시대의 변화에 적응

현대의 사회는 이전의 사회와 비교해 많은 변화가 있어 이전의 시대와 다른 지식과 인재를 요구하고 있습니다. 즉 (ⅰ) 정적인 사회에서 **동적인 정보통신혁명기에 적응할 수 있는 새로운 지식과 상황적응력, 응용력을 가져야합니다.** 즉, 정적인 시대에는 지식이 한정되어있고, 규격화되어 있어서 주로 외워서 적용하는 과정이 대부분이라면, 동적인 사회에서는 변화에 적응하는 창의력과 응용력이 요구되어 단순한 지식이나 암기는 중요성이 현저히 떨어지며, 지식도 시대가 변화하면 오류가 생기는 경우도 있습니다.
(ⅱ) 일률적 획일적 사회에서 **개성존중**의 사회로 변화하므로 자신만의 독특한 성격과 특성을 더욱 발전시켜야합니다. (ⅲ) 형식보다 실질을 중요하게 여기므로 형식과 격식에 얽매이지 말고 **효율적이고 실질적**인 공부를 하여야합니다. (ⅳ) 따라서 이전의 객관식 단답형에서 **주관식 서술형으로 더 나아가 논술·구술문제, 심층면접 및 입학 사정관 제도 등으**로 변함에 유의하여 공부 방법을 달리하고 변화에 민감하게 대처하여야합니다.
학교내신 시험도 50%**이상이 서술형**으로 출제되며, 대학입시도 특기자전형, 수시모집이 강화되고 있습니다.
이처럼 변화하는 시대의 제도에 적응하는 즉, KMO・영재센터・과학고・민사고 등의 특목고・국제중 등의 입시대비와 서술형 내신대비를 목적으로 하는 내용의 교육에 중점을 두었습니다.

② 정규과정의 한계를 극복

(ⅰ) 학교의 정규과정은 단계별로 내용의 한계가 규정되어 있어 일정단계 이상의 내용은 학습대상에서 제외되어있고 학기와 학년에 따라 내용들이 흩어져 있어서 효율적인 원리학습에 한계가 있습니다. 예를 들어 집합의 경우 중1수학(상)와 고등수학(상)으로 나누어져있어 두 단계를 통합하는 과정이 효율적입니다. (ⅱ) 학교의 정규과정에는 시대의 변화에 부응하는 내용이 포함되어 있지 않으나 각종 시험에 나오는 경우에 학교에서는 가르치지 않으므로 시험대비가 되지 못하는 경우가 있습니다. 예를 들어 논리추리·홀짝수분석·비둘기집 이론·정수론과 같은 내용은 정규과정에 없거나 소홀하지만 각종 시험에는 자주 등장하는 내용입니다. (ⅲ) 정규 진도 과정은 수업이 평준화되어 있어 창의력이나 심화과정의 수업에 대처하지 못하는 경우가 있습니다.

③ 관련사항을 묶어 기본이 되는 해법을 찾는 원리학습

위와 같은 시대의 변화에 부응하고 공교육의 정규과정에 제외된 부분과 창의력, 심화학습을 짧은 시간에 효율적으로 공부하려면 관련사항을 한데 묶어 기본이 되는 원리를 추출하여 학습하는 방법이 효율적이며, 차원이 달라지거나 새로운 상황·시대변화에 적응할 수 있는 교육방식이 절대적으로 필요합니다.

따라서 이 과정은 ***수학적 사고 시스템과 이론 정립, 서술형문제 풀이방식을 학습***하며, ***개인의 특성을 파악***하여 ***효율적인 수학교육***이 될 수 있도록 ***정규·선행과정 이전***에 이수합니다.

(2) 중점내용

① 100문제를 푸는 것보다 100문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다.

같은 유형의 문제를 1가지 방법으로 계속 풀면 기계적이고, 획일적 사고를 가진 학생이 되어 창의력과 응용력이 없어집니다. 그러므로 100문제를 푸는, 지루하고 소모적인 반복 학습 보다는 100문제에 적용되는 내용을 근원적으로 접근하여 왜 이 단원이 필요하며 왜 그렇게 풀어야 되는지 고민하여 적용되는 원리를 찾아내 그 단원 내용을 최소화하여야합니다. 그래야 학습내용을 간략화 할 수 있고, 더 나아가 흥미를 가지게 되어 응용력과 창의력이 생기게 됩니다.

더 나아가 특목고 및 영재센터에서 출제되는 **새로운 응용, 현실적용 및 원리를 묻는 창조적문제가 출제** 되었을 때 당황하지 않고 풀 수 있으며 어떠한 문제가 출제되어도 풀 수 있다는 자신감이 생깁니다.

② 공식은 외우는 것이 아니고 탐구를 통하여 공식이 나오는 과정을 습득하게 하여 창의력과 논리력을 증진시킵니다.

공식의 단순 암기는 같은 유형문제의 답만 낼 수 있을 뿐 응용문제나 차원이 다른 문제가 출제되면 풀 수 없습니다. 마치 머릿속이 지식을 아무렇게 담아놓은 쓰레기통처럼 되어 꺼내 쓰려면 어디에 있는지 어디에 적용되는지 알 수 없고, 몇 개 안되는 지식을 습득해도 뇌의 용량이 넘쳐 다른 지식을 담을 수 없게 됩니다. 그러므로 공식이 나오는 과정을 탐구하여 학생 스스로 그 공식을 유도해 낼 수 있어야만 창의적 문제·응용문제·차원을 달리하는 문제·논리력이 필요한 문제의 경우 그 공식의 원리를 적용 하여 문제를 풀 수 있으며, 비로소 단편적인 지식이 아닌 살아있는 지식이 됩니다.

③ 원리에 강하면 응용력이 생김을 알게 합니다.

한 가지 원리가 여러 단원에 쓰이고 서로 연관되어 변형되는 과정을 터득하면 수학 공부 량이 현저히 줄어들며 수학공식을 자유로이 유도해낼 수 있습니다. 그러면 여러 새로운 의문점들을 스스로 찾아낼 수 있고 응용력이 생깁니다. 예를 들어, 인수분해를 왜 하는지, 인수분해를 하면 어떤 편리한 점이 있는지, 식을 문자를 사용하여 세우면 왜 편리한지를 알 수 있으며, 교과서 등에 실리지 않았지만 교과서 내용보다 현실적으로 더 중요한 부분을 알아내어 낯선 문제도 쉽게 풀 수 있는 역량을 기르게 됩니다.

④ 원리는 재미있으며 어려운 문제를 쉽게 풀리게 합니다.

원리에 대한 이해와 과정의 탐구는 처음에는 습관화 되지 않아 어려워 보이고 시간이 많이 걸리며 힘들 때도 있지만, 한 번 이해를 하면 매우 어려워 보이는 문제가 간단하게 풀려 수학이 노동이 아니라 마치 마술처럼 느껴져 수학공부에 흥미를 가지게 되고, 놀라울 정도의 실력향상으로 이어지게 됩니다.

⑤ 수학은 현실에 적용되는 실질적 학문임을 깨우치게 합니다.

수학은 단순한 산수가 아니라 일상생활에서 일어나는 복잡해 보이는 문제도 수학적인 지식과 원리가 적용되면 아주 간단히 풀리게 되어, 편리함을 알면 수학은 학생을 괴롭히

고 노는 시간을 빼앗은 귀찮은 과목이 아니라 우리 생활의 어려움을 쉽게 해결하고, 노는 시간을 늘려 주는 유익하고 편리한 과목임을 알게 됩니다.

⑥ 과정에 대한 탐구는 논리력을 키워 모든 과목의 성적향상에 기여 합니다.
과정에 대한 탐구는 논리력과 창의력을 키우며, 뇌의 용량을 크게 하여 수학과목의 성적향상에 기여할 뿐 아니라 다른 과목을 공부하는 방법에도 활용되고, 수학공부 하는 시간에 다른 과목을 공부할 수 있어 모든 과목의 성적향상에 기여 합니다.

3. 수학 원리탐구의 구성 및 학습대상

원리탐구 시리즈는 수학 원리탐구 5권(수학 원리탐구Ⅰ·Ⅱ·Ⅲ·Ⅳ·Ⅴ)과 그 위 단계인 도전 원리탐구 4권(도전 원리탐구 $A \bullet B \bullet C \bullet D$)로 구성되었으며 Ⅰ·Ⅱ·Ⅲ은 11강, Ⅳ·Ⅴ는 7강으로 되어 있으며 도전 원리탐구 $A \bullet B \bullet C \bullet D$는 각각 5강으로 되어있습니다. 수학 원리탐구는 Ⅴ권이 가장 낮은 단계이고, Ⅰ권이 가장 높은 단계로 되어 있습니다. Ⅴ권은 초등원리로서 초 2, 3, 4학년이면 이해할 수 있도록 하였으며, Ⅲ권은 Ⅱ권을 이해할 수 있도록 하고 초등영재센터 준비생과 처음 원리탐구를 접하는 중학생 및 중학영재센터 준비생을 위한 수학의 기본 원리서입니다. Ⅱ권은 Ⅰ권을 이해한 초·중학생을 위한 책으로서 **초등영재센터준비와 중학논술·구술·창의력은**Ⅰ·Ⅱ**로 충분합니다.**
중등영재센터준비와 KMO등의 올림피아드준비생은 도전 원리탐구 4권(도전 원리탐구 $A \bullet B \bullet C \bullet D$)까지 공부하기 바라며 앞으로 예견되는 대학 본고사 시험에 유용하게 쓰일 것으로 예상됩니다. 나아가 중등 *KMO* 1차와 민사고·과학고 준비서는 수학 올림피아드 600제 가있으며, *KMO* 2차 및 고등 *KMO*준비서는 수학 올림피아드 300제가 있습니다.

4. 맺음말

산고 후의 출산이 이런 건가 할 정도로 수년간의 강의와 연구의 산물이 세상에 나오게 되어 기쁨과 더불어 무한 책임을 느낍니다. 앞으로 질 높은 강의와 더 많은 노력을 통하여 더욱 이해하기 쉽고, 재미있는 수학 원리탐구가 될 수 있도록 계속적으로 보완·교정해 나갈 것을 약속드립니다.

2005년 7월 저자 최 경호

※ 설명에 오류가 있거나 오차, 탈자를 바로잡는 경우, 홈페이지(m1239.co.kr)에 올리겠으므로 참고하시고, 책에 관한 질문이나 의문사항을 올려주시면 사례하겠습니다.

수학공부 어떻게 할 것인가?

흔히 우리 학생과 부모님(선생님)들은 너무도 효율보다는 양에 집착하여 수학문제를 많이 풀어야하고 오랜 동안 책상에서 바른 자세로 공부해야하고 숙제가 많아야 하며, 공식을 잘 외우고 모르는 문제는 자주 질문을 해야 하며 복잡한 문제도 끝까지 노동을 해서라도 풀어야한다는 생각을 가진 분이 의외로 많다. 또한 선생님은 자세하고 화려한 설명과 족집게 같은 적중률을 가져야하며 질문에 아주 친절하고 자세하게 대답해야 유능한 선생이라고 생각하는 분들도 또한 의외로 많다. 이와 같은 생각을 시대의 변화, 개성의 존중, 효율성과 능률, 시험방식의 변화 등을 고려하여 다시 생각해보아야 한다.

현대의 사회는 이전의 사회와 비교해 많은 변화가 있어 이전의 시대와 다른 지식과 인재를 요구한다. 즉 (ⅰ) 정적인 사회에서 동적인 정보통신혁명기에 적응할 수 있는 새로운 지식과 상황적응력, 응용력을 가져야한다. (ⅱ) 일률적 획일적 사회에서 개성존중의 사회로 변화하므로 자신만의 독특한 성격과 특성을 더욱 발전시켜야한다. (ⅲ) 형식보다 실질을 중요하게 여기므로 형식과 격식에 얽매이지 말고 효율적이고 실질적인 공부를 하여야 한다. (ⅳ) 따라서 이전의 객관식 단답형에서 주관식 서술형으로 더 나아가 논술구술문제, 심층면접 및 입학사정관제로 변함에 유의하여 공부 방법을 달리하고 변화에 민감하게 대처하지 않으면 자신의 능력을 충분히 발휘되지 않음을 명심하여야 한다.

10여년의 수학강의와 상담을 통해서 공부를 잘하는 학생과 잘하지 못하는 학생들을 보면서 느꼈던 수학에 관한 생각과 경험을 하지 말아야할 것 4가지(4불)와 해야 할 것 5가지(5행)로 구분하였다. 이것을 바탕으로 자신의 개성에 맞는 공부 방법을 터득해 나아 갈 수 있기를 바란다.
[※ 4불의 (1) '같은 유형의 문제를 반복하여 많이 풀지 마라.'의 해결 방법은 5행의 (1) '생각을 많이 하라.'이다. 이와 같이 4불과 5행의 같은 번호를 연결하여 이해하기 바란다.)

1. 4불(不)

(1) 같은 유형의 문제를 반복하여 많이 풀지 마라.

시대가 빠르게 변화해 가므로 이 시대에 적응할 수 있는 창의력이 요구되고 개성이 존중되는 시대이다. 이것이 자신의 발전, 더 나아가 사회의 발전에 도움이 되기 때문이다. 같은 유형을 되풀이하여 풀다보면 그 문제는 그렇게 풀어야한다는 기계적인 습성이 붙게 된다. 비교적 난이도가 적은 학교 시험에서는 고득점의 요인이 되겠지만, 심도 높은 시험에는 여러 각도로 응용되고 여러 원리가 융합되어 나오기 때문에 기계적인 학습에 의해 학교시험은 100점을 맞아도 영재센터·국제중·*KMO*등의 각종올림피아드·과학고를 비롯한

특목고 시험에 좋은 성적을 내지 못함을 많이 보았다. 수학은 기계적인 풀이를 요하는 과목이 아니다. 다양한 생각의 방법을 탐구하고 이를 바탕으로 새로운 상황(문제)에 대처하는 능력을 기르는 학문이다. 당장의 시험점수에 연연하여 수많은 문제를 풀어보는 것은 자칫 기계적인 인간을 만들어 창의력과 응용력을 죽이게 된다. 더 나아가 소중한 시간을 낭비하게 된다. 물론 수학에서 사칙연산이나 인수분해와 같은 기계적인 풀이가 필요한 부분도 다소 있다.

(2) 공식을 외우지마라.

수학은 암기과목이아니라 생각하는 방법을 체계적으로 연구하고 새롭고 다양한 상황에 효율적이고 신속히 대응하는 방법(응용력과 창의력)을 연구하는 학문이다. 이러한 연구에 의해 얻어진 산물 중의 하나인 공식을, 나오는 과정 없이 외워서 문제풀이에 적용하면 난이도가 낮은 단순한 시험에서는 단기간에 성적이 오를 수 있지만, 비교적 난이도가 있는 차원을 달리하는 시험문제에서는 낭패를 보게 된다. 더 나아가 장기적으로 단순한 시험에서도 성적이 점점 떨어져 학년이 올라가면서 수학을 포기하게 된다. 그 다음의 결과는 어떻겠는가?

(3) 질문을 많이 하지마라.

흔히, 정적인 사회에서는 모르면 질문을 많이 그리고 빨리해서 짧은 시간에 많은 진도(양)를 이해·암기하여야 공부를 잘한다고 생각한다. 그러나 동적인 사회에서는 다양하고 깊이 있는 생각이 요구된다. 공부를 하다 모르는 부분이 있을 때 한번 생각하고, 그래도 모르면 또다시 생각하여 될 수 있는 한 혼자서 해결해야 한다. 모른다고 모르는 즉시 질문을 하게 되면 자신의 생각이 없어지며 생각의 깊이가 없어진다. 생각 없이 빨리 얻은 지식은 또한 빨리 잊게 마련이다.

(4) 노동하지마라.

어려워 보이고, 잘 풀리지 않는 문제를 풀 때 흔히 단편 지식으로 처음부터 일명 노동으로 풀어 많은 시간을 소요하여 푼 다음 만세를 부르는 학생이 있다. 차라리 그 시간에 나가 노는 편이 좋다. 어려워 보이고 잘 풀리지 않은 문제는 그 풀이 방법을 달리해 보는 습관을 길러야 한다. 어려운 문제라는 것은 그동안 알지 못한 지식이나 원리가 필요한 문제일 경우가 대부분이다. 따라서 다른 방법으로 풀려는 생각을 해야지 무턱대고 그동안 알고 있는 방법으로 단순 노동을 하지 말아야한다.

2. 5행(行)

(1) 생각을 많이 하라.

많은 문제를 푸는 것이 아니라 많은 다양한 생각을 하여야한다. 앞에서 언급 하였듯이 수학은 다양하고 깊은 생각을 하는 학문이며 나아가 그를 통해서 새로운 문제를 해결하는 응용력과 새로운 것을 창조하는 능력을 기르는 학문이다. 많은 문제를 풀어 기계적인 생각을 하게 되는 것은 수학을 포기하는 행위이다. 많은 문제를 풀어서 그 중에 몇 문제가 나와 시험을 잘 보는 것보다는 **다양한 생각으로 어떠한 문제라도 풀 수 있는 능력을 기르는 것**이 수학을 잘하는 비결임을 알아야한다.
단순하거나, 쉽게 풀 수 있는 문제는 빠르고 정확하게 푼 다음 어려운 문제에 많은 시간을 할애하여 생각을 깊게 하면 처음 적응하는데 시간이 걸리겠지만 습관이 되면 푼 문제의 수가 적고 시간이 덜 걸리더라도 고득점을 할 수 있으며 장기적으로 학년이 높아갈수록 수학성적이 좋아지며, 놀 수 있는 시간이 많아진다. 즉 ***많은 문제를 푸는 것보다 많은 생각을 하여야 한다.***

(2) 과정에 충실 하라.

과정 없이 공식을 외워서 문제풀이에 적용하는 것은 자신의 지식이 되지 않는다. 조금이라도 변형된 문제나 응용력이 요구되는 문제가 나올 경우 당황하게 되고, 특히 평면에서 사용되는 공식은 나오는 과정에 대한 근원적인 이해 없이는 공간에 적용하지 못한다. 즉 지식은 많으나 그 지식을 어디에 어떻게 쓰는지 모르면 그 지식이 많아짐에 따라 뇌 속에서 그 지식은 쓰레기가 되어 공부를 점점 못하게 되는 요인이 된다. 우리 주위에 공부를 많이 했으나 공부를 점점 못해가는 학생을 흔히 볼 수 있다. 따라서 단순한 지식의 암기를 피하고 그 공식이 나오는 과정을 깊이 있게 생각해야한다. 그 과정에 대한 이해는 차원이 다를 때 그 과정을 차원에 맞게 적용하여 스스로 공식을 만들 수 있고 변형된 문제가 나올 경우 과정을 변형하여 응용력을 기를 수 있다. 그래야만 진정한 자신의 지식이 되고 설령 공식을 잠시 잊었어도 생각하여 머릿속에서 공식을 만들어 내게 된다. 단순한 공식의 암기는 응용력과 창의력을 죽여 시간이 갈수록 점점 공부를 못하는 원인 됨을 명심하고 그 과정에 충실하고 공식은 잊어버리는 것이 좋다.

(3) 혼자 해결하려 노력하고, 가르쳐 주는 습관을 가져라.

될 수 있는 한 모르는 부분은 혼자서 생각해보고 또 생각해봐야하며 또한 관련 서적을 보거나 인터넷을 검색하여 해결하려고 노력해야한다. 그래도 모르는 부분은 친구에게 물어보고 서로의 의견을 나누어본 다음 해결되지 않을 때 ***최후의 방법으로 선생님에게 질문***하여야 한다.
아직 지식의 양이 적고 생각하는 방법에 익숙하지 않은 저학년의 경우 혼자 해결하기에

시간이 많이 걸리겠지만 생각하는 방법을 일깨워주고, 모르는 것을 스스로 알아내는 방법을 가르쳐주면 스스로 공부하는 습관이 길러져서 점점 질문의 양을 줄여나갈 수 있으며 그래야만 자신의 수학적 능력이 커지는 것이다.
또한 친구가 모르는 문제를 물어 왔을 때, 자신이 친구에게 가르쳐준다기보다는 토론의 대상이 되는 것이다. 가르치는 것은 두 번 배운 것과 같다는 말처럼 친구에게 가르쳐줌으로 해서 자신의 지식을 분명하게 하고, 그 부분에 대한 기억이 오래가며, 그 과정에서 논리력과 표현력이 향상됨을 잊어서는 안 된다. 즉 가르쳐준 만큼 친구에 이익이 되어 자신이 손해(?)가 되는 것이 아니라 가르쳐준 만큼 친구도 이익이고 본인은 지식이 명확해지고 표현력이 좋아져 두 배의 이익이 된다.

(4) 왜냐고 의문을 가져라.

문제가 어렵고 복잡해 보일 경우 생각 없이 노동으로 풀지 말고, 이 문제는 왜 어려워 보일까? 노동 이외의 다른 풀이 방법이 없을까를 연구하고 여러 가지 푸는 방법을 생각해 보아야 한다. 수학은 언뜻 보기에 어려워 보이는 문제를 쉽게 푸는 방법을 연구하고 풀이를 만들어가는 학문임을 명심하고, 어려운 문제는 반드시 쉽고 간단히 푸는 방법이 있는데, 본인이 잘 알지 못하고 있는 경우가 많으므로 스스로 그 방법을 터득하는 습관을 길러야만, 실전에서 어떠한 어려운 문제가 출제되더라도 풀 수 있다는 자신감을 갖게 되며 진정한 실력자가 된다.

(5) 겸손하며 수학(선생님)을 좋아(존경)하라.

사회생활의 직업에서도 그 직업이 마음에 들지 않으면 성공하기 힘들듯이 아무리 뛰어난 학생이라도 그 과목의 선생님 또는 과목이 싫으면 그 과목 공부에 집중이 되지 않고 능률이 오르지 않는다. 따라서 그 과목의 공부를 잘하려면 선생님을 좋아하려 노력해야하고 뒤에 이야기하지만 선생님도 학생들이 좋아하도록 여러 가지 노력을 하여야한다. 강의는 상호작용이므로 아무리 명 강의를 하여도 선생님이 싫으면 듣지 않고, 들려오지도 않는다. 한편 강의 실력이 좀 떨어지더라도 학생과 선생님 간에 신뢰가 생기면 내용이 머릿속에 잘 들어와 공부를 잘하게 된다. 따라서 선생님은 학생들에게 신뢰와 존경심이 들도록 항상 노력하고 학생들에게 애정 어린 관심과 조언을 하여야 하며, 학생은 설령 선생님이 거짓말을 하여도 참말처럼 들려야 공부를 잘 할 수 있다. 아무리 명강사라도 학생 스스로 선생님을 존경하려고 노력하고 노력을 하여도 되지 않으면 성적이 오르지 않을 것이므로 학원을 바꾸는 것이 좋다.
조금 안다고 남을 무시하고 선생님 설명을 듣지 않으면 아무리 좋은 두뇌라도 한계가 온다. 자신보다 저학년에게도 배울 수 있어야 하며 배우는 것을 부끄러워 말아야한다. 항상 배우는 자세를 지녀야 자신이 발전한다. 공자님의 위대함은 자기보다 나이가 어리고 학문이 뒤진 사람에게도 배우는 자세를 가져야한다고 강조한 것이다.

제 1강 계산에 관한 원리탐구

계산에 대한 원리탐구는 수학의 기본에 관한 아주 간단한 약속(① 덧셈을 곱셈으로 표현하는 약속과 ② 거듭 제곱하는 경우의 표현하는 약속)에서 출발하며 숫자의 계산이 문자에서도 똑같이 적용됨을 알게 한다. 또한 이 약속들이 수학의 여러 계산 법칙으로 응용됨을 알게 될 것이며, 이것의 활용을 자유로이 할 수 있으면 계산능력이 월등이 좋아지고 정확·완벽·신속한 계산을 할 수 있어 수를 계산함에 많은 편리함을 느낄 수 있다. 계산을 정확하고 신속하게 하는 것은 문제를 풀 때에 시간을 적게 들이고, 생각하는 시간을 늘려 결국 어려운 문제도 잘 풀 수 있는 밑거름이 되므로 잘 익혀 두어야한다.

1. 덧셈과 곱셈간의 관계에 관한 원리탐구

[1] 숫자의 표현

아래의 점들을 직접 세려고하면 몇 개 안될 때는 모르지만 아주 많은 경우에는 세기도 어려울 뿐만 아니라 정확하지지가 않다. 규칙적이고 시각적으로 쉽게 세기 위하여 덧셈과 곱셈에 관한 원리를 파악해 보자. 점이 가로로 3개 세로로 2개씩으로 이루어진 점을 예로써 원리를 익혀보자.

• • •

• • •

위의 점을 $2+2+2$ **(또는** $3+3$**)으로 표현하며,** 2**를** 3**번 합한 것(또는** 3**을** 2**번 합한 것)을** $3\times2=2\times3$**으로 표현한다. 즉,** $2+2+2=3\times2$ **(또는** $3+3=2\times3$**) 이다.**
따라서 다음과 같이 표현한다.
(1) ① $5+5+5=3\times5$ ② $9+9+9+9=4\times9$
(2) $3\times9+4\times9=(9+9+9)+(9+9+9+9)=7\times9$
(3) $7\times6-2\times6=(6+6+6+6+6+6+6)-(6+6)=5\times6$

[2] 문자에 적용

위와 같은 덧셈과 곱셈에 관한 숫자의 계산 원리는 문자에도 같이 적용된다. 단지, 다음 단원에서 배우겠지만 숫자는 2×9**을** 29**로 쓰면 진법의 원리에 의하여** $29=20+9$**이 되므로 *숫자와 숫자 사이에 곱셈부호를 생략하면 안 되지만* 문자에서는** $2\times a=2a$**와 같이 쓸 수 있다는 차이점을 제외하고 같이 적용된다.**
$x+x+x=3\times x=3x$ **(또는** $3\cdot x$**)으로 표현하며, 문자** x**를** 3**번 더했으므로 곱셈으로 나타내면** $3\times x$**가 되고 *문자와 숫자 사이에는 곱하기 부호를 생략하여 쓴다.* 또는 문자와 숫자 사이, 숫자와 숫자 사이의 중앙에 "·" 부호를 사용하여 쓸 수 있다.**

따라서 다음과 같이 계산한다.

(1) ① $a+a+a=3\times a=3a$ ② $b+b+b+b=4\times b=4b$

(2) $4\times a+5\times a=(a+a+a+a)+(a+a+a+a+a)=9\times a=9a$

(3) $6\times a-2\times a=(a+a+a+a+a+a)-(a+a)=4\times a=4a$

[3] 원리의 확장

교환법칙을 적용하여 덧셈과 곱셈간의 관계에 관한 원리탐구를 확장하여 보자. 뺄셈은 교환법칙이 적용되지 않으나 $2-3=2+(-3)$, $3a-2a=3a+(-2a)$**의 형태로 바꾸면 교환법칙을 적용할 수 있다. 즉, "－"를 포함하여 교환하면 교환법칙이 성립한다.**

(1) 덧셈의 교환법칙이 성립함으로 다음과 같이 계산할 수 있다.

① $9+9+7+9+7+9=9+9+9+9+7+7=4\times 9+2\times 7$

② $3\times 5+5\times 3+7\times 5+2\times 3=3\times 5+7\times 5+2\times 3+5\times 3=10\times 5+7\times 3$

③ $10\times 5-2\times 3-7\times 5+8\times 3$
$=10\times 5+(-7\times 5)+7\times 3+(-2\times 3)=10\times 5-7\times 5+8\times 3-2\times 3=3\times 5+6\times 3$

다음부터 ③과 같은 계산에서는 괄호를 치는 번거로움을 피하기 위하여
$10\times 5-2\times 3-7\times 5+7\times 3=10\times 5-7\times 5+8\times 3-2\times 3=3\times 5+6\times 3$**로 하기로 한다.**

(2) 문자도 숫자와 마찬가지로 덧셈은 교환법칙이 성립함으로 다음과 같이 계산한다.

① $a+a+b+a+b+a=a+a+a+a+b+b=4a+2b$

② $3a+5b+7a+2b=3a+7a+2b+5b=10a+7b$

③ $10a+5b-4a-2b=10a+(-4a)+5b+(-2b)=10a-4a+5b-2b=6a+3b$

문자에서도 ③과 같은 계산에서는 괄호를 치는 번거로움을 피하기 위하여 "－"를 포함하여 $10a+5b-4a-2b=10a-4a+5b-2b=6a+3b$ **로 계산하기로 한다.**

[4] 계수가 유리수인 문자의 계산

문자 앞의 계수가 유리수인 경우도 정수와 마찬가지로 같은 문자의 계수를 계산한 다음 문자를 붙인다.

(1) $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})a=\frac{5}{6}a$ **(2)** $\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}x=(\frac{4}{5}-\frac{1}{5})x=\frac{3}{5}x$

[원리의 이해]

$2a+3a$**의 계산에서 문자의 합이나 차는 문자 앞의 계수를 더하거나 뺀 다음에 문자를 붙인다고 외워서는 안 되고, 오히려 문자의 합이나 차가 원래의 약속, 즉** $2\times a=2a$**에서는** a**를 2번 더해주었고,** $3\times a=3a$**에서는** a**를 3번 더해준 것이므로** a**를 모두 5번 더하므로** $5a$**가 되어 결국 계수끼리 더하거나 뺀 다음에** a**를 붙이는 것으로 이해하여야한다. 그래야만 복잡해 보이는 문제에서 혼돈이 없이 문제를 쉽게 풀 수 있고 여러 응용문제의 풀이가 원활해짐을 명심하고 그 기본에 간단한 약속에 대한 원리가 있음을 꼭 기억해야 한다.**

원리탐구

1 탐구예제

다음 계산을 곱셈기호를 써서 또는 곱셈기호를 생략할 수 있으면 생략하여 표현하여라.

(1) $9+9+9+9$

(2) $a+a+a+a$

(3) $3\times5+7\times5$

(4) $2a+7a$

(5) $19\times9-7\times9$

(6) $17a-2a$

(7) $10\times9-2\times3-3\times9+7\times3$

(8) $10a-2b-a+7b$

(9) $\frac{1}{3}a+\frac{2}{9}a$

(10) $\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}x$

풀이

답: (1) 4×9 (2) $4a$ (3) 10×5 (4) $9a$ (5) 12×9 (6) $15a$ (7) $7\times9+5\times3$ (8) $9a+5b$ (9) $\frac{5}{9}a$ (10) $\frac{3}{7}x$

(1) 9를 4번 더했으므로 4×9이다.

(2) 문자 a를 4번 더했으므로 곱셈으로 나타내면 $4\times a$가 된다. 문자와 숫자 사이에는 곱셈 부호 생략이 가능하므로 $4a$ 이다.

(3) 3×5는 5를 3번 합한 것$(5+5+5)$이고, 7×5는 5를 7번 합한 것 $(5+5+5+5+5+5+5)$이므로 5를 총 10번 더해준 것 $(5+5+5)+(5+5+5+5+5+5+5)$ 즉 $(3+7)\times5=10\times5$이다.

(4) $2a+7a$는 $2\times a=2a$에서는 a를 2번 더했고, $7\times a=7a$에서는 a를 7번 더 했으므로 a를 총 9번 더한 것이므로 $(2+7)\times a=9\times a=9a$가 된다.

(5) 19×9는 9를 19번 더한 것이고 7×9는 9를 7번 더한 것이다. 그러므로 9를 19번 더한 것에서 7번 더한 것을 빼주었으므로 9를 더한 것이 12개만 남는다. $(19-7)\times9=12\times9$

(6) $17a-2a$는 $17\times a=17a$는 a를 17번 더한 것이고 $2\times a=2a$는 a를 2번 더한 것이므로 17번 더한 것에서 2번 더한 것을 빼주었으므로 a를 총 15번 더한 것이다. $(17-2)\times a=15\times a=15a$

(7) 덧셈의 교환 법칙이 적용되므로 다음과 같이 계산한다.

$10\times9-2\times3-3\times9+7\times3=10\times9-3\times9+7\times3-2\times3=7\times9+5\times3$

(8) 문자의 계산에서도 덧셈의 교환 법칙이 적용되므로 다음과 같이 계산한다.

$10a-2b-a+7b=10a-a+7b-2b=9a+5b$

(9) 계수가 유리수인 경우도 정수와 같이 계산한다. $\frac{1}{3}a+\frac{2}{9}a=(\frac{1}{3}+\frac{2}{9})a=\frac{5}{9}a$

(10) $\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}x=(\frac{4}{7}-\frac{1}{7})x=\frac{3}{7}x$

유제 1

다음 계산을 곱셈기호를 써서 또는 곱셈기호를 생략할 수 있으면 생략하여 표현하여라.

(1) $6+6+6$

(2) $b+b+b$

(3) $4\times6+8\times6$

(4) $3b+6b$

(4) $29\times8-7\times8$

(6) $19a-8a$

(7) $9\times2+4\times3-2\times2-2\times3$

(8) $10a-7b-5a+2b$

(9) $\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x$

(10) $\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}y$

2. 거듭제곱에 관한 원리탐구

[1] 거듭제곱의 표현

같은 수를 여러 번 곱하는 것을 거듭제곱이라 하며, 2를 3번 곱하는 것을 2위에 작은 수로 3을 쓴다. 즉, $2\times2\times2=2^3$ 이라고 약속하고, 2를 밑 3을 지수라고 한다.
따라서 다음과 같이 계산한다.

(1) ① $5\times5\times5\times5=5^4$ ② $9\times9\times9\times9\times9=9^5$

(2) $2^2\times2^3=(2\times2)\times(2\times2\times2)=2^5$

(3) ① $2^6\div2^2=\dfrac{2\times2\times2\times2\times2\times2}{2\times2}=2^4$ ② $2^3\div2^6=\dfrac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2\times2}=\dfrac{1}{2^3}$

(4) $(2^3)^2=2^3\times2^3=2^6$

[2] 문자에 적용

위와 같은 거듭제곱에 관한 숫자의 계산 원리는 문자에도 똑같이 적용된다.
즉, $x\times x\times x=x^3$, $b\times b\times b\times b\times b=b^5$ 이 된다.
따라서 다음과 같이 계산한다.

(1) $x^2\times x^3=(x\times x)\times(x\times x\times x)=x^5$

(2) ① $x^6\div x^2=\dfrac{x\times x\times x\times x\times x\times x}{x\times x}=x^4$ ② $x^3\div x^3=\dfrac{x\times x\times x}{x\times x\times x}=x^0=1$

③ $x^3\div x^6=\dfrac{x\times x\times x}{x\times x\times x\times x\times x\times x}=\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}$

- x^0 은 분모와 분자가 같다는 의미이므로 $1^0=10^0=100^0=a^0=\cdots$ 임을 알 수 있다.
- a^{-3} 이란 분모의 지수가 분자의 지수보다 3개가 많은 $\dfrac{1}{a^3}$을 의미 한다.

(3) $(x^2)^3=x^2\times x^2\times x^2=x^6$ (4) $(\dfrac{b^3}{a^2})^3=\dfrac{b^3}{a^2}\times\dfrac{b^3}{a^2}\times\dfrac{b^3}{a^2}=\dfrac{b^9}{a^6}$

(5) ① $(2x^2)^3=2x^2\times2x^2\times2x^2=8x^6$ ② $(ab^2)^3=ab^2\times ab^2\times ab^2=a^3b^6$

[덧셈과 곱셈간의 관계에 관한 원리와 거듭제곱에 관한 원리의 구별]

덧셈과 곱셈간의 관계에 관한 원리와 거듭제곱에 관한 원리를 혼동하지 말고 둘을 정확하게 구별해야 한다. 예를 들어 $2+2+2=3\times2$ 이고, $2\times2\times2=2^3$ 임을 분명히 구별해야 한다.
문자에서도 $a+a+a=3a$ 과 $a\times a\times a=a^3$을 또한 구별해야 한다.
a를 3번 더한 것을 $3\times a=3a$ 라고 약속하고, a를 3번 곱한 것을 a^3이라고 약속함을 구별하는 것이 계산의 매우 중요한 기본 원리의 이해이며 문자나 숫자를 계산함에 흔히 많이 틀리는 부분이기도 하다.

[3] 원리의 확장

교환법칙을 적용하여 거듭제곱에 관한 원리탐구를 확장하여 보자. 나눗셈의 경우 교환법칙이 성립하지 않으나 $2\div3=2\times\frac{1}{3}$, $3a\div2a=3a\times\frac{1}{2a}$**의 형태로 바꾸면 교환법칙을 적용할 수 있다. 즉, 나눗셈을 곱셈으로 바꾸던가(역수이용), 나눗셈 부호 "÷"를 포함하여 교환하면 교환법칙이 성립한다.**

(1) 곱셈의 교환법칙이 성립함으로 다음과 같이 계산한다.

① $9\times9\times7\times9\times7\times9=9\times9\times9\times9\times7\times7=9^4\times7^2$

② $5^3\times3^5\times5^7\times3^2=5^3\times5^7\times3^2\times3^5=5^{10}\times3^7$

③ $5^8\times3^5\div5^2\div3^2=5^8\times\frac{1}{5^2}\times3^5\times\frac{1}{3^2}=5^8\div5^2\times3^5\div3^2=5^6\times3^3$

분수로 계산하는 ③과 같은 계산에서는 곱셈으로 바꾸는 번거로움을 피하기 위하여 $5^8\times3^5\div5^2\div3^2=5^8\div5^2\times3^5\div3^2=5^6\times3^3$ **로 하기로 한다.(즉, "÷"를 포함하여 교환)**

(2) 문자의 계산에도 똑같이 적용된다.

① $a\times a\times b\times a\times b\times a=a\times a\times a\times a\times b\times b=a^4\times b^2$

② $a^3\times b^5\times a^7\times b^2=a^3\times a^7\times b^2\times b^5=a^{10}\times b^7$

③ $a^8\times b^5\div a^2\div b^2=a^8\times\frac{1}{a^2}\times b^5\times\frac{1}{b^2}=a^8\div a^2\times b^5\div b^2=a^6\times b^3$

[4] 유리수를 포함한 문자의 곱셈과 나눗셈 계산

유리수를 포함한 경우도 숫자는 숫자끼리 계산하고 문자는 문자끼리 계산한다.

(1) $2a\times3a=2\times a\times3\times a=2\times3\times a\times a=6a^2$

(2) $\frac{2}{5}a\times10=\frac{2}{5}\times a\times10=\frac{2}{5}\times10\times a=4a$

(3) $2a^3\div3a=2\times a^3\times\frac{1}{3\times a}=2\times\frac{1}{3}\times a^3\times\frac{1}{a}=\frac{2}{3}a^2$

(4) $(\frac{3b^3}{2a^2})^3=\frac{3b^3}{2a^2}\times\frac{3b^3}{2a^2}\times\frac{3b^3}{2a^2}=\frac{27b^9}{8a^6}$

[원리의 이해]

(1) 거듭제곱에 관한 원리탐구는 $x^4 \times x^3$의 계산에서 곱셈은 지수끼리 더하고, $x^5 \div x^3$는 지수끼리 빼서 계산한다고 외우지 말고, 오히려 $x^4 \times x^3$은 x를 4 번 곱한 것에 x를 3번 곱한 것을 더 곱하여 x 를 7번 곱한 것이 되므로 결과적으로 지수의 곱셈은 지수끼리 더하는 꼴이 되고, $x^5 \div x^3$ 은 x 를 5 번 곱한 것에 x 를 3 번 곱한 것을 나누어 x 를 2 번 곱한 것이 되므로 결과적으로 지수의 나눗셈은 지수끼리 빼는 꼴이 되는 것으로 이해하여야 한다.

(2) $(a^2)^3$ 도 (1)번과 같이 거듭제곱에 대한 거듭제곱은 지수끼리 곱한다고 외우지 말고 거듭제곱에 대한 기본약속의 개념으로 넘어가 $(a^2)^3$ 는 a^2 을 3 번 곱한 개념 즉, $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2$ 이므로 a^6 이 되므로 결과적으로 거듭제곱에 대한 거듭제곱은 지수끼리 곱하는 꼴이 된다.

(3) 마찬가지로 $(\frac{3b^2}{2a^3})^2 = \frac{3b^2}{2a^3} \times \frac{3b^2}{2a^3} = \frac{9b^4}{4a^6}$ 이므로 유리식의 분모와 분자에 지수만큼 곱한 결과가 된 것으로 이해하여야한다. 이렇게 함으로 다음의 응용문제가 쉽게 풀리며 외우는 것을 줄여 공식이나 법칙의 단순한 암기가 아닌 원리 및 약속의 단순한 적용이 됨으로서 수학이 쉬운 과목이 될 수 있다.

2 탐구예제

원리탐구

다음 계산을 거듭제곱으로 표현하여라.

(1) $5^3\times5^2\times5^4$ (2) $x^4\times x^3$

(3) $5^6\div5^2$ (4) $x^5\div x^3$

(5) $x^2\times y^2\times x^3\times y^4$ (6) $x^5\div y^2\div x^3\times y^4$

(7) $x^2\div x^2$ (8) $x^2\div x^5\div x^3\times x^4$

(9) $\frac{2}{5}x^2\times10$ (10) $3x^3\div5x$

풀이

답: (1) 5^9 (2) x^7 (3) 5^4 (4) x^2 (5) x^5y^6 (6) x^2y^2
(7) 1 (8) $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ (9) $4x^2$ (10) $\frac{3}{5}x^2$

(1) $5^3\times5^2\times5^4=(5\times5\times5)\times(5\times5)\times(5\times5\times5\times5)$**으로 5를 총9번 곱했으므로** $5^{3+2+4}=5^9$**이다.**

(2) $x^4\times x^3=(x\times x\times x\times x)\times(x\times x\times x)$ **으로 x를 4번 곱한 것에 x를 3번 곱한 것을 더 곱했으므로 x를 총 7번 곱한 것 이므로 결국** $x^{4+3}=x^7$ **이다.**

(3) $5^6\times\frac{1}{5^2}=\frac{5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5}$**이므로 5를 6번 곱한 것에서 5를 2번 곱한 것을 약분하면 5를 4번 곱한 것이 되어** $5^{6-2}=5^4$**이다.**

(4) $x^5\div x^3=x^5\times\frac{1}{x^3}=\frac{x\times x\times x\times x\times x}{x\times x\times x}$**이므로 약분하면 x^2만 남으므로 결국** $x^{5-3}=x^2$**이 된다.**

(5) **곱셈은 교환법칙이 성립하므로** $x^2\times y^2\times x^3\times y^4=x^2\times x^3\times y^4\times y^2=x^5\times y^6$ **이 된다.**

(6) $x^5\div y^2\div x^3\times y^4=x^5\div x^3\times y^4\div y^2=x^2\times y^2=x^2\times y^2=x^2y^2$**이다.**

(7) $x^2\div x^2=\frac{x\times x}{x\times x}=x^0=1$ ($\therefore 0$ **을 제외한 모든 수의 0 제곱은 1이다.** $10^0=100^0=1=\cdots$)

(8) $x^2\div x^5\div x^3\times x^4=x^2\times x^4\div x^5\div x^3=x^6\div x^8=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$

(9) $\frac{2}{5}x^2\times10=\frac{2}{5}\times x^2\times10=\frac{2}{5}\times10\times x^2=4x^2$

(10) $3x^3\div5x=3\times x^3\times\frac{1}{5\times x}=3\times\frac{1}{5}\times x^3\times\frac{1}{x}=\frac{3}{5}x^2$

유제 2

다음 계산을 거듭제곱으로 표현하여라.

(1) $7^2\times7^3$ (2) $a^6\times a^3$ (3) $3^{15}\div3^3\div3^5$

(4) $a^9\div a^3$ (5) $a^4\times b^2\times a^3\times b^7$ (6) $a^2\div b^2\div a^3\times b^6$

(7) $a^9\div a^9$ (8) $\frac{2}{3}x\times9$ (9) $3x^5\div6x^2$

3 탐구예제

원리탐구

다음 계산을 하여라.

(1) $(2^4)^3$ (2) $(a^5)^3$ (3) $(3a^5)^2$ (4) $(a^2b^3)^2$

(5) $(2a^4b^3)^3$ (6) $(\frac{b^2}{a^4})^3$ (7) $(\frac{b^2}{2a^3})^3$

풀이 **답:** (1) 2^{12} (2) a^{15} (3) $9a^{10}$ (4) a^4b^6 (5) $8a^{12}b^9$ (6) $\frac{b^6}{a^{12}}$ (7) $\frac{b^6}{8a^9}$

(1) $(2^4)^3 = 2^4 \times 2^4 \times 2^4$**이므로 2를 총 12번 곱한 것이 되므로** $2^{4\times 3} = 2^{12}$**이다.**

(2) $(a^5)^3 = a^5 \times a^5 \times a^5 = a^{5\times 3} = a^{15}$

(3) $(3\times a^5)^2 = (3\times a^5)\times(3\times a^5) = 3\times 3\times a^5 \times a^5 = 9\times a^{5\times 2} = 9\times a^{10} = 9a^{10}$**이다.**

(4) $(a^2\times b^3)^2 = (a^2\times b^3)\times(a^2\times b^3) = a^2\times a^2\times b^3\times b^3 = a^4\times b^6 = a^4b^6$**이다.**

(5) $(2a^4b^3)^3 = (2\times a^4\times b^3)\times(2\times a^4\times b^3)\times(2\times a^4\times b^3) = 8\times a^{4\times 3}\times b^{3\times 3} = 8a^{12}b^9$**이다.**

(6) $(\frac{b^2}{a^4})^3 = \frac{b^2}{a^4}\times\frac{b^2}{a^4}\times\frac{b^2}{a^4} = \frac{b^{2\times 3}}{a^{4\times 3}} = \frac{b^6}{a^{12}}$

(7) $(\frac{b^2}{2a^3})^3 = (\frac{b^2}{2\times a^3})^3 = (\frac{b^2}{2\times a^3})\times(\frac{b^2}{2\times a^3})\times(\frac{b^2}{2\times a^3}) = \frac{b^{2\times 3}}{2\times 2\times 2\times a^{3\times 3}} = \frac{b^6}{8\times a^9} = \frac{b^6}{8a^9}$ **이다.**

유제 3

다음 계산을 하여라.

(1) $(3^2)^3$ (2) $(b^3)^5$ (3) $(2a^3)^4$ (4) $(x^3y^4)^2$

(5) $(3a^4b^5)^2$ (6) $(\frac{b^5}{a^2})^3$ (7) $(\frac{b^5}{3a^4})^4$

3. 덧셈과 곱셈간의 관계와 거듭제곱에 관한 원리의 응용

덧셈과 곱셈간의 관계와 거듭제곱이 혼합되는 문제에서 덧셈과 곱셈간의 관계에 관한 원리와 거듭제곱에 관한 원리의 구별이 특히 중요 하다. 만약 이 단원을 공부하다 이해가 되지 않으면 앞부분을 다시 한 번 공부하기 바란다.

4 *탐구예제*

원리탐구

다음 문제를 풀어라.

(1) $4^4+4^4+4^4+4^4$ **의 값과 같은 것을 구하여라.**

① 4^{16} ② 16^4 ③ 16^{16} ④ 4^5 ⑤ **답이 없음**

(2) 4^4 **의 반은 얼마인가?**

① 2^7 ② 2^2 ③ 2^4 ④ 4^2 ⑤ **답이 없음**

(3) x^x+x^x ($x>0$)**과 같은 것을 구하여라.**

① x^{2x} ② $(2x)^x$ ③ $2x^x$ ④ $(2x)^{2x}$ ⑤ **답이 없음**

(4) 2^{30}, 3^{20} **이 두 수 중에서 어느 것이 더 큰가?**

풀이 **답: (1)** ④ **(2)** ① **(3)** ③ **(4)** $2^{30}<3^{20}$

(1) 같은 숫자 4^4**을** 4**번 더했으므로** $4\times4^4=4\times(4\times4\times4\times4)=4^5$**이 된다.**
(2) 4^4**의 반이란** $4^4\div2$**이다.** 4^4**은** $(2^2)^4$**이므로 이것은** $2^2\times2^2\times2^2\times2^2=2^{2\times4}=2^8$**이 된다.**
그러므로 $4^4\div2=2^8\times\frac{1}{2}=2^{8-1}=2^7$ **이 된다.**
(3) 같은 문자 x^x**을** 2**번 더했으므로** $2\times x^x=2x^x$ **이다.**
(4) 거듭제곱으로 되어있는 큰 숫자를 비교함에는 지수를 같게 만들어 밑의 크기를 비교하거나 밑을 같게 하여 지수의 크기를 비교하여 그 크기를 가려야한다. 이 문제의 경우 지수를 10**으로 같게 하면 편리하므로** $2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$**,** $3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$**이고** $8<9$**이므로** $2^{30}<3^{20}$**이다.**

유제 4

(1) $2^2+2^2+2^2+2^2$ **의 값과 같은 것을 구하여라.**

① 2^8 ② 8^4 ③ 8^2 ④ 2^4 ⑤ **답이 없음**

(2) 2^{10} **의 반은 얼마인가?**

(3) $3x^x+2x^x$ ($x>0$)**을 간단히 하여라.**

(4) 8^{13}**과** 4^{20} **의 크기를 비교하여라.**

4. 사칙계산에 관한 원리탐구

계산을 순서대로 하면 시간이 많이 걸리며 복잡하고 정확성이 떨어지므로 덧셈, 곱셈의 교환, 결합법칙과 분배법칙 및 십진법의 원리를 이용하면 복잡해 보이는 계산이 쉽고 빨리 풀리게 된다. 단순한 계산에서는 그 효용성을 크게 느끼지 못하나 복잡한 계산의 경우 매우 유용하고 편리하다. 실제 계산에서 많이 사용됨으로 잘 익혀서 신속하고 정확한 계산이 되도록 한다.

예를 들어 $19+35+181+65$를 계산할 때 $19+35+181+65=54+181+65=235+65=300$과 같이 순서대로 계산하면 복잡하고 시간이 많이 걸리나 교환법칙, 결합법칙 및 십진법의 원리를 이용하면 $19+35+181+65=19+181+35+65=200+100=300$과 같이 신속하고 정확하게 풀린다. 곱셈에서도 마찬 가지로 $4\times7\times3\times25$를 차례대로 계산하기 보다는 $7\times3\times25\times4=21\times100=2100$과 같이 계산하면 편리하다.

[1] 교환, 결합, 분배법칙

(1) 교환법칙: 위치바꿈

① 덧셈의 교환법칙

덧셈의 좌우를 서로 바꾸어 더해도 두 수의 합은 변하지 않는다. 이와 같은 연산법칙을 덧셈의 교환법칙이라고 한다. 즉, $2+3=3+2$, $a+b=b+a$ 이다.

② 곱셈의 교환법칙

곱셈의 좌우를 서로 바꾸어 곱해도 두 수의 곱은 변하지 않는다. 이와 같은 연산법칙을 곱셈의 교환법칙이라고 한다. 즉, $2\times3=3\times2$, $a\times b=b\times a \leftrightarrow ab=ba$ 이다.

③ 뺄셈, 나눗셈의 교환법칙은 성립하지 않는다.

(예, $2-3\neq3-2$, $2\div3\neq3\div2$) 그러나 $2+(-3)=(-3)+2$, $2\div3=\frac{1}{3}\times2$와 같이 괄호와 역수(또는 부호와 같이 이동)를 이용하면 가능하다.

(2) 결합법칙: 계산순서 바꿈(괄호이용)

① 덧셈의 결합법칙

3개 이상의 수를 서로 더할 때는, 먼저 앞의 두 개의 수를 서로 더하고, 다시 3번째 수를 더하는 것과 먼저 뒤의 두개의 수를 서로 더하고 다시 첫 번째 수와 서로 더하여도 그 합은 변하지 않는다. 즉, $(15+76)+24=15+(76+24)$, $(a+b)+c=a+(b+c)$ 이다.

② 곱셈의 결합법칙

3개 이상의 수를 서로 곱할 때는, 먼저 앞의 두 개의 수를 서로 곱하고, 다시 3번째 수를 곱하는 것과 먼저 뒤의 두개의 수를 서로 더하고 다시 첫 번째 수와 서로 곱하여도 그 곱은 변하지 않는다. 즉, $(13\times5)\times2=13\times(5\times2)$, $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ 이다.

(3) 분배법칙: 괄호의 해체·생성

사칙계산에서 덧셈과 뺄셈만 있을 경우, 곱셈과 나눗셈만 있을 경우에는 순서대로 계산

한다. 혼합계산의 경우는 곱셈, 나눗셈을 먼저 계산하고 덧셈, 뺄셈을 순서대로 계산하는 것이 원칙이다. 괄호가 있는 경우에는 괄호를 먼저 계산하나 분배법칙을 이용하면 더욱 편리하게 계산할 수 있다. 또한 ***괄호안의 항이 동류항이 아닌 경우에 괄호 안에서 덧셈, 뺄셈이 안 되므로 분배법칙을 이용하여 괄호를 없애거나, 괄호로 묶어서 계산하면 편리하게 계산이 되므로*** 잘 익혀 두어야 한다.

$2\times(3+4)=(3+4)+(3+4)=2\times3+2\times4$,

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c \Leftrightarrow a(b+c)=ab+ac$, $a(b-c)=ab-ac$

$2\times(b+2)=2b+4$, $4\times(2x-1)=8x-4$, $2\times(3x-y)=6x-2y$

$8\times(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})=8\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{2}=2+4=6$,

$4\times(\frac{1}{2}a+2)=4\times\frac{1}{2}a+8=2a+8$, $\frac{1}{2}\times(4a-6)=\frac{1}{2}\times4a-\frac{1}{2}\times6=2a-3$

위와 같은 연산을 분배 법칙이라 한다.

특히 $ab+ac$이 $a(b+c)$이 됨을 충분히 연습해 두면 계산에 편리하게 쓰인다.

나눗셈의 경우도 역수를 이용하면 가능하다.

즉 $(24+48)\div12=(24+48)\times\frac{1}{12}=24\times\frac{1}{12}+48\times\frac{1}{12}=2+4=6$

[2] 십진법

다음 장에서 자세히 배우겠지만 10배가 되면 한자리씩 왼쪽으로 올라가는 기수법을 십진법이라 한다.

(1) 덧셈의 계산에서 교환법칙과 10진법의 원리를 응용하여 합이 $10, 100, 1000, \cdots$이 되는 부분끼리 먼저 계산하면 아래의 예처럼 훨씬 계산이 간편 신속, 정확하다.

$29+18+71+182=29+71+18+182=100+200=300$

(덧셈의 교환법칙을 이용하여 합이 100, 200이 되도록 18과 71을 교환하여 계산이 쉽게 한다.) 실제의 계산에서는 $29+18+71+182=100+200=300$ 와 같이 마음속으로만 줄을 그은 부분을 계산하여 암산으로 하도록 한다. 다음의 풀이는 편의 상 암산한 부분에 줄을 그은다.

(2) 곱셈의 계산에서 교환법칙과 소인수 2와 5의 곱을 이용한 10진법의 원리를 응용하여 $10=2\times5$, $100=2^2\times5^2$, $1000=2^3\times5^3$, …이 되는 부분을 먼저 계산하면 순서대로 계산할 때 보다 아래의 예처럼 복잡하던 계산이 매우 간편해진다.

이 부분을 잘 기억하여 실제의 계산에 사용하면 예전의 계산보다 훨씬 빠르고, 정확하여 수학문제 푸는데 많은 도움이 될 것이다.

$2\times11\times9\times5=11\times9\times2\times5=99\times10=990$

(곱셈의 교환법칙을 이용하여 곱이 $10, 100, 1000, \cdots$이 되는 2와 5계산을 한다.)

$2\times11\times9\times5=99\times10=990$와 같이 곱셈도 마음속으로만 줄을 그은 부분을 계산하여 암산으로 하도록 한다.

5 탐구예제

원리탐구

다음 식을 교환 법칙을 사용하는 대신 줄로 그어 표시하여 계산하여라.

(1) $64+293+36+59+7$
(2) $2a+3a+8a+27a$
(3) $3.7+16.5+26.3+3.5$
(4) $2.8a+15.4a+17.2a+14.6a$
(5) $2\times13\times5\times2\times7\times5$
(6) $4\times11\times3\times25$

풀이 **답:** (1) 459 (2) $40a$ (3) 50 (4) $50a$ (5) 9100 (6) 3300

(1) $64+36=100$ **이고** $293+7=300$**이므로** $64+293+36+59+7=100+300+59=459$**이다.**

(2) **문자에서도 교환법칙이 성립되므로** $2a+3a+8a+27a=10a+30a=40a$

(3) $3.7+26.3=30$**이고** $16.5+3.5=20$**이므로** $3.7+16.5+26.3+3.5=30+20=50$**이다.**

(4) $2.8a+15.4a+17.2a+14.6a=20a+30a=50a$

(5) $2\times13\times5\times2\times7\times5=13\times7\times2\times5\times2\times5=9100$

(6) **곱셈의 교환법칙을 이용하여** $4\times25=100$, $11\times3=33$**이므로** $4\times11\times3\times25=3300$**이 되어 간단하게 계산할 수 있다.**

유제 5

다음 식을 교환 법칙을 사용하는 대신 줄로 그어 표시하여 계산하여라.

(1) $2+4+5+18+25$
(2) $22a+13a+8a+87a$
(3) $3.3+26.2+96.7+3.8$
(4) $12.6a+41.8a+18.2a+17.4a$
(5) $2\times11\times7\times5$
(6) $8\times33\times3\times125$

6 탐구예제

원리탐구

분배법칙 $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$**을 이용하여 다음을 풀어라.**

(1) ① $16\times(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}+\frac{5}{2})$ ② $3\times(5x-2)$ ③ $4a\times(\frac{1}{2}a+2)$

(2) 두 수 $9^{29}-9^{28}$, 9^{28}**의 크기를 비교하여라.**

(3) $(-\frac{7}{24})\times(-\frac{2}{3})-\frac{1}{6}\times\frac{7}{24}-\frac{7}{24}\times\frac{1}{2}$

풀이 **답: (1)** ① 38 ② $15x-6$ ③ $2a^2+8a$ **(2)** $9^{29}-9^{28}>9^{28}$ **(3)** 0

(1) ① $16\times\frac{1}{4}+16\times(-\frac{3}{8})+16\times\frac{5}{2}=4-6+40=38$

② $3\times(5x-2)=15x-6$ ③ $4a\times(\frac{1}{2}a+2)=2a^2+8a$

(2) 9^{29}**은** 9**를** 29**번 곱한 것이므로** $9^{29}=9\times9^{28}$ **이다.**
분배법칙을 이용하여 $9^{29}-9^{28}=9\times9^{28}-9^{28}=(9-1)\times9^{28}=8\times9^{28}$**이므로** $9^{29}-9^{28}$**이** 9^{28}**보다 크다.**
(3) $(-\frac{7}{24})\times(-\frac{2}{3})-\frac{1}{6}\times\frac{7}{24}-\frac{7}{24}\times\frac{1}{2}=(-\frac{7}{24})\times(-\frac{2}{3})+(-\frac{1}{6})\times\frac{7}{24}+(-\frac{7}{24})\times\frac{1}{2}$**와 같으므로 곱셈으로 묶인 부분에서 공통은** $\frac{7}{24}$**이므로** $\frac{7}{24}$**로 묶어** $\frac{7}{24}(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2})$**이 된다.** $(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2})$**에서 첫 번째 수** $\frac{2}{3}$**은** $(-\frac{7}{24})\times(-\frac{2}{3})$**에서** $(-)\times(-)=(+)$**이므로 양수로 계산됐고** $-\frac{1}{2}$**도 마찬가지임에 주의하고, 괄호 속 분수를 통분하여 계산하면** $\frac{7}{24}(\frac{4}{6}-\frac{1}{6}-\frac{3}{6})=\frac{7}{24}\times0=0$**이 된다.**

유제 6

분배법칙 $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$**을 이용하여 다음을 풀어라.**

(1) ① $27\times(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{5}{27})$ ② $3\times(x-2)$ ③ $4a\times(\frac{3}{4}a-2)$

(2) 두 수 $3^{2008}-3^{2007}$, 3^{2007}**의 크기를 비교하라.**

(3) $(-\frac{6}{29})\times(-\frac{2}{3})-\frac{1}{6}\times\frac{6}{29}-\frac{6}{29}\times\frac{1}{3}$

5. 계산에 관한 응용 원리탐구

분배법칙을 뺄셈과 나눗셈 및 사칙 혼합계산에 응용하고, 소인수분해를 이용한 곱셈과 나눗셈 과정을 암산으로 하는 습관을 기르면 계산력이 놀랄 만큼 빨라지므로 처음에 많이 힘이 들더라도 꼭 암산하는 방법을 꾸준히 반복하여 실제 계산에 자유로이 활용할 수 있도록 한다. 이 과정이 익숙해지면 계산이 더욱 편리해진다.

[1] 교환·분배법칙과 십진법을 응용한 원리탐구

(1) 교환 법칙의 확장 응용

뺄셈은 교환법칙이 성립하지 않으나, 계속하여 빼거나 더할 때 또는 빼기를 섞어 연산하는 경우 계산식에 괄호가 없으면, 계산할 때 연산 부호를 포함하여 '옮길' 수 있다.
(예, $212-27+127-12=212-12+127-27$, $31-12+29=31+29-12$),

(2) 괄호의 응용

덧셈과 뺄셈이 섞인 연산에서 괄호를 덧붙일 때에 덧붙인 괄호 앞이 '+' 부호이면, 괄호 안의 수의 연산 부호는 변하지 않고, 덧붙인 괄호 앞이 '−' 부호이면, 괄호 안의 수의 원래 부호는 '+' 가 '−' 로 변하고, '−' 가 '+' 로 변한다.
[예, $29+17-7=29+(17-7)$, $25-7-13=25-(7+13)$, $22-13+3=22-(13-3)$]
역으로 덧셈과 뺄셈이 섞인 연산에서 괄호를 없앨 때에 괄호 앞이 '+' 부호이면, 괄호를 없앤 후에도, 괄호 안의 수의 연산 부호는 변하지 않으며, 괄호 앞이 '−' 부호이면, 괄호를 없앤 후에는, 괄호 안의 수의 연산 부호는 '+' 가 '−' 로 변하고, '−' 는 '+' 로 변한다.
[예, $29+(11-13)=29+11-13$, $43-(8+13)=43-8-13$, $17-(7-3)=17-7+3$]
이와 같은 성질을 활용하면 뺄셈 또는 덧셈·뺄셈이 섞인 계산이 간편해진다.

(3) 십진법의 응용

① $10, 100, 1000, \cdots$ 이 되도록 숫자를 합하고 빼서, 분배법칙을 이용하면 처음에 복잡하고 힘들지만 아래 과정을 통하여 진법과 사칙계산을 자유롭게 할 수 있으면 계산력을 기르는데 매우 유용하다. 예를 들면, 다음과 같다.

$9+99+999=(10-1)+(100-1)+(1000-1)=1110-3=1107$

$372-98=372-(100-2)=272+2=274$

$6\times998=6\times(1000-2)=6000-12=5988$

$18\times72+18\times29=18\times101=18\times(100+1)=1800+18=1818$

② $100=4\times25$, $1000=8\times125$ 을 이용하기
예를 들면, 다음과 같다.

$29\times25=(4\times7+1)\times25=7\times4\times25+25=700+25=725$

$49\times125=(8\times6+1)\times125=6\times8\times125+125=6000+125=6125$

7 탐구예제

원리탐구

다음을 식을 써서 계산하여라.

(1) $9999+99$ (2) $5419-127+1227-419$

(3) 8×199 (4) $2459-1997$

(5) $29\times97+29\times4$ (6) $1758-346+246-564-36$

(7) 13×25

풀이 **답:** (1) 10098 (2) 6100 (3) 1592 (4) 462 (5) 2929 (6) 1058 (7) 325

순서대로 또는 있는 그대로 풀면 복잡한 경우에 계산법칙을 응용하여 계산 순서를 바꾸거나, 괄호의 이용 등을 통하여 편리하고 신속, 정확한 것이 무엇인지를 연구하여 계산하여야 한다.

(1) $(10000-1)+(100-1)=10100-2=10098$

(2) $5419-127+1227-419=(5419-419)+(1227-127)=5000+1100=6100$

(3) **분배법칙을 이용하여 푼다.** $8\times(200-1)=1600-8=1592$

(4) $2459-(2000-3)=2459-2000+3=459+3=462$

(5) $29\times97+29\times4$**에서** 29×97**는** 29**를** 97**번 더한 것이고** 29×4**는** 29**를** 4**번 더한 것이다. 그러므로** 29**를 총** 101**번 더했으므로** $29\times101=29\times(100+1)=2900+29=2929$**이다.**

(6) $1758-346+246-564-36=1758-(346-246)-(564+36)=1758-100-600=1058$

(7) $13\times25=(4\times3+1)\times25=3\times4\times25+25=300+25=325$

유제 7

다음을 식을 써서 계산하여라.

(1) $999+9$ (2) $919-46-54-19$

(3) 7×1999 (4) $4492-2997$

(5) $929\times997+929\times4$ (6) $9469-223+1223-469$

(7) 57×125

[2] 소인수분해를 응용한 원리탐구

소인수분해를 작은 소인수로 나누는 기존의 방식은 많은 시간이 소요 되므로 아래처럼 머릿속에서 수를 분해하여 한 번에 소인수분해를 하는 습관을 길러야 시간이 절약되어 문제를 푸는 방볍에 시간을 많이 할애할 수 있어 어려운 문제를 해결할 수 있다. 힘들더라도 반드시 반복 연습하여 암산으로 하는 습관을 길러두기 바란다.

(1) 소인수 분해

수를 소수의 곱의 꼴로 표현하는 것을 소인수 분해라고 한다. 소인수 분해는 각종계산에서 많이 쓰이고 곱이나 나누기 계산에서 아주 편리하게 응용된다. 곱셈이나 나눗셈 계산에서 처음부터 곱하거나 나누지 말고 오히려 소인수분해하여 놓은 다음 마지막에 곱셈이나 나눗셈 계산을 하는 순서를 지키면 계산이 간편함을 명심하여야 한다. 즉 ***직접 곱하거나 나누는 것은 최후에 한다.***

아래와 같이 머릿속에서 직접분해 하는 습관을 기른다.

$10=2\times5,\ 100=2\times2\times5\times5=2^2\times5^2,\ 1000=2^3\times5^3\ \cdots$

$36=6\times6=2\times3\times2\times3=2^2\times3^2,\quad 180=18\times10=2\times3\times3\times2\times5=2^2\times3^2\times5$

(2) 소인수분해를 응용한 계산

① 소인수분해를 응용한 곱셈과 나눗셈

다음과 같이 숫자를 소인수 분해한 다음 십진법의 원리를 적용하여 $10, 100, 1000, \cdots$ 이 되는 부분을 먼저 계산하는 것이 신속하고 편리하다. 생각 없이 기존의 직접 계산법을 쓰면 시간이 많이 필요하고 정확성이 떨어지므로 힘들어도 아래와 같은 계산을 반복적으로 하여 계산력 기르기에 힘쓰기 바란다. 어렵다고 절대로 피하지 말기 바라며, 힘든 만큼 계산력이 매우 좋아진다. 예를 들면 다음과 같다.

$25\times8=5^2\times2^3=(5\times2)\times(5\times2)\times2=10\times10\times2=200$

$200\div25=2\times100\div25=\dfrac{2^3\times5^2}{5^2}=8$

② 분수를 소수로 만들기

분모의 소인수가 2 또는 5인 경우에 분모가 10^n꼴이 되도록 분모와 분자에 같은 수를 곱하여 분수를 소수로 만들 때, 직접 나누지 않고 계산할 수 있다.

$\dfrac{1}{4}=\dfrac{1\times5^2}{2^2\times5^2}=0.25\qquad \dfrac{1}{125}=\dfrac{1\times2^3}{5^3\times2^3}=0.008$

8 탐구예제

원리탐구

다음을 식을 써서 계산하여라.

(1) 25×12　　(2) 75×24　　(3) 625×48

(4) $700\div25$　　(5) $3000\div125$

풀이　**답:** (1) 300　(2) 1800　(3) 30000　(4) 28　(5) 24

(1) $25\times12=5^2\times4\times3=5^2\times2^2\times3=100\times3=300$

(2) $75\times24=(3\times25)\times(3\times8)=3\times5^2\times3\times2^3=5^2\times2^2\times2\times3\times3=100\times18=1800$

(3) $625\times48=5^4\times2^4\times3=10000\times3=30000$

(4) $700\div25$**에서** $700=7\times100=7\times2^2\times5^2$**이므로** $\dfrac{7\times2^2\times5^2}{5^2}=7\times2^2=28$**이다.**

(5) $3000\div125$**에서** $3000=3\times2^3\times5^3$**이고** $125=5^3$**이므로** $\dfrac{3\times2^3\times5^3}{5^3}=3\times2^3=24$**이다.**

유제 8

다음을 식을 써서 계산하여라.

(1) 125×24　　(2) 75×28　　(3) 625×56

(4) $1900\div25$　　(5) $7000\div125$　　(6) $3600\div75$

9 탐구예제

원리탐구

다음을 소인수 분해를 써서 소수로 나타내어라.

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{3}{125}$ (3) $\frac{1}{8}$

풀이 **답:** (1) 0.75 (2) 0.024 (3) 0.125

(1) $\frac{3}{4}=\frac{3}{2^2}$, $2^2\times5^2=100$**이므로 분모, 분자에 똑같이** 5^2**을 곱하면** $\frac{3\times5^2}{2^2\times5^2}=\frac{75}{100}=0.75$**이다.**

(2) $\frac{3}{125}=\frac{3}{5^3}=\frac{3\times2^3}{5^3\times2^3}=\frac{24}{1000}=0.024$

(3) $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=\frac{1\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{125}{1000}=0.125$

유제 9

다음을 소인수 분해를 써서 소수로 나타내어라.

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{4}{625}$ (3) $\frac{2}{25}$

[3] 덧셈과 곱셈간의 관계를 응용한 원리탐구

(1) $(2010+2010)\times50$ **을 계산하는 경우 앞에서 배운바와 같이** $2010+2010=2\times2010$ **로 계산한 다음** 10 **진법의 원리를 이용** $(2010+2010)\times50=2\times2010\times50=2010\times2\times50=201000$ **로 계산하여야 한다. 물론 이 과정을 식을 쓰지 않고 머리로 계산하여만 계산력이 향상됨은 두말할 필요가 없다.**
$(2010+2010)\times50=4020\times50=201000$ **과 같은 직접계산법은** 10 **진법의 원리가 적용되지 않은 경우에 하여야한다.**
(2) 29×101 **을 계산하는 경우** $29\times101=29\times(100+1)=2900+29=2929$ **와 같이 계산하면 편리하다.**

10 탐구예제

원리탐구

다음을 식을 써서 계산하여라.

(1) $(4\times29+21\times29)\times4$ (2) $(18+18+18+18+18)\times4$

(3) $(2011+2011+2011+2011)\times25$ (4) $256\times98+256\times3$

풀이 **답:** (1) 2900 (2) 360 (3) 201100 (4) 25856

(1) $(4\times29+21\times29)\times4=29\times25\times4=29\times5^2\times2^2=29\times100=2900$
(2) $(18+18+18+18+18)\times4=18\times5\times4=36\times10=360$
(3) $(2011+2011+2011+2011)\times25=2011\times4\times25=201100$
(4) $256\times(98+3)=256\times(100+1)=25600+256=25856$

유제 10

다음을 식을 써서 계산하여라.

(1) $(120\times29+5\times29)\times8$ (2) $(929+929+929+929)\times25$

(3) $(2009+2009+2009+2009+2009)\times20$ (4) $96\times97+96\times4$

6. 분수의 편리한 계산

[1] 분모, 분자에 같은 수를 곱하는 편리한 계산

$\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{2}{4}$ 인 것과 같이 수학에서는 분모, 분자에 같은 수를 곱하여도 변화가 없다.
이와 같은 성질을 번분수의 계산에 응용한다.
번분수의 분모의 분모, 분자의 분모의 최소공배수를 분모 분자에 곱하여도 그 값에는 변함이 없으므로 이것을 활용하면 계산이 더욱 편리해진다.
예를 들면 다음과 같다.

$\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ 에서 분모의 분모 2 와 3 , 분자의 분모의 3 의 최소공배수 6 을 분모 분자에 곱하면, 즉 $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{2}{3}\times6}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\times6}=\dfrac{4}{3-2}=4$ 가 된다.

[2] 부분분수로 고쳐서 계산하기

부분분수로 고치는 문제는 분모를 두 수의 곱으로 표현했을 때, 두 수의 차가 분자에 있을 경우 (1)번을, 두 수의 합이 분자에 있을 경우 (2)번을 이용하는 것이 편리하다.

(1) $\dfrac{B-A}{AB}=\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\quad\therefore\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$

예, $\dfrac{2}{15}=\dfrac{2}{3\times5}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\quad\therefore\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{3\times5}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})$

(2) $\dfrac{A+B}{AB}=\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}\quad\therefore\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{A+B}\left(\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}\right)$

예, $\dfrac{8}{15}=\dfrac{8}{3\times5}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\quad\therefore\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{3\times5}=\dfrac{1}{8}(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5})$

예를 들면 다음과 같다.

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}$

$$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

(2) $\dfrac{4}{3}-\dfrac{7}{12}+\dfrac{9}{20}-\dfrac{11}{30}$

$$=\frac{4}{1\times3}-\frac{7}{3\times4}+\frac{9}{4\times5}-\frac{11}{5\times6}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

11 탐구예제

원리탐구

다음을 간편하게 계산하여라.

(1) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}$ (2) $\dfrac{\frac{3}{10}+\frac{2}{5}}{\frac{7}{10}-\frac{1}{5}}$ (3) $\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{56}$

풀이 **답:** (1) $\dfrac{9}{2}$ (2) $\dfrac{7}{5}$ (3) $\dfrac{5}{24}$

(1) **분모의 분모, 분자의 분모** 4, 3, 6 **의 최소공배수는** 12 **이므로 분모와 분자에** 12 **를 곱해준다.**

$$\frac{\frac{3}{4}\times 12}{(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})\times 12}=\frac{9}{4-2}=\frac{9}{2}$$

(2) **분모의 분모, 분자의 분모의 최소공배수는** 10 **이므로 분모와 분자에** 10**을 곱해준다.**

$$\frac{(\frac{3}{10}+\frac{2}{5})\times 10}{(\frac{7}{10}-\frac{1}{5})\times 10}=\frac{3+4}{7-2}=\frac{7}{5}$$

(3) $\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{56}$

$$=\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\frac{1}{7\times 8}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$$

유제 11

다음을 간편하게 계산하여라.

(1) $\dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}$ (2) $\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}$ (3) $\dfrac{9}{20}-\dfrac{11}{30}+\dfrac{13}{42}-\dfrac{15}{56}$

종합문제 >>

1. **덧셈과 곱셈에 관한 원리탐구를 이용하여 다음 계산을 하여라.**

(1) $26\times5+74\times5$

(2) $79\times7-29\times7$

(3) $7a+13a$

(4) $95a-15a$

(5) $\frac{2}{5}a+\frac{1}{5}a$

(6) $\frac{6}{7}x-\frac{2}{7}x$

(7) $x^4+x^4+x^4$

(8) $2x^2+4x^2$

2. **사칙에 관한 원리탐구를 이용하여 다음 계산을 하여라.**

(1) $63+294+37+54+6$

(2) $2829-43-29-27$

(3) $3.8+17.5+16.2+2.5$

(4) $1423-(190-577)$

(5) $75\times7\times8\times2\times4\times3\times5\times625$

(6) $625\times3\times8\times7\times4\times2$

(7) $12a+23a+8a+27a$

(8) $9876+1209-876+791$

3. 분배법칙 $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$을 이용하여 다음을 풀어라.

(1) $(63+72)\div 9$

(2) $4x\times(\frac{3}{2}x-2)$

(3) $32(\frac{1}{16}-\frac{3}{8}+\frac{5}{2})$

(4) 두 수 $2^{29}-2^{28}$, 2^{28} 의 크기를 비교

(5) $(-\frac{7}{24})\times(-\frac{1}{3})-\frac{1}{6}\times\frac{7}{24}-\frac{7}{24}\times\frac{1}{2}$

(6) $(\frac{1}{3}x-4y)\times\frac{1}{2}$

4. 거듭제곱에 관한 원리탐구를 이용하여 다음 계산을 하여라.

(1) $3^5\times 3^2$

(2) $x^7\times x^2$

(3) $x^9\div x^3$

(4) $x^3\div x^3$

(5) $x^2\times y^2\times x^3\times y^4$

(6) $x^2\div x^5$

(7) $x^5\div y^2\div x^3\times y^4$

(8) $\frac{2}{7}x^2\times 2$

(9) $\frac{1}{2}x^3\times 4x$

5. 거듭제곱에 관한 원리탐구를 이용하여 다음 계산을 하여라.

(1) $(a^5)^{30}$

(2) $(2a^3)^2$

(3) $(a^4b^3)^2$

(4) $(3a^2b^3)^2$

(5) $(\frac{b^3}{a^4})^{30}$

(6) $(\frac{b^{20}}{2a^8})^2$

***6.* 다음 문제를 풀어라.**

(1) $5^5+5^5+5^5+5^5+5^5$ **의 값과 같은 것은?**

① 5^6 ② 25^{25} ③ 5^{25} ④ 25^5 ⑤ **답이 없음**

(2) $2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2$ **의 값과 같은 것은?**

① 2^8 ② 16^{16} ③ 16^2 ④ 2^5 ⑤ 2^{16}

(3) 8^{10} **의 반은 얼마인가?**

① 4^5 ② 2^{29} ③ 8^5 ④ 4^{10} ⑤ **답이 없음**

(4) $2x^x+2x^x$ ($x>0$)**과 같은 것은?**

① $2x^{2x}$ ②$(2x)^x$ ③ $4x^x$ ④$(4x)^x$ ⑤ **답이 없음**

(5) 3^{30}, 4^{20} **이 두 수 중에서 어느 것이 더 큰가?**

***7.* 여러 가지 계산에 관한 원리탐구를 이용하여 다음 계산을 하여라.**

(1) $2999+198+97+6$

(2) $9+99+999+9999$

(3) $2488-1996$

(4) $7592-2995$

(5) 76×101

(6) 33×25

(7) $49\times36+49\times65$

(8) 73×125

8. 다음을 식을 써서 계산하여라.

(1) 125×24

(2) 45×18

(3) $3500\div125$

(4) $300\div25$

(5) $600\div8$

(6) $(2009+2009)\times50$

(7) $(125+125+125)\times8$

9. 다음 분수를 소인수 분해를 이용하여 소수로 나타내어라.

(1) $\frac{7}{25}$

(2) $\frac{1}{16}$

(3) $\frac{7}{125}$

(4) $\frac{3}{4}$

10. 다음을 간편하게 계산하여라.

(1) $\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}}$

(2) $\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}}$

(3) $\frac{1}{24}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60}+\frac{1}{84}+\frac{1}{112}$

(4) $\frac{1}{6}+\frac{8}{15}+\frac{3}{28}-\frac{2}{35}-\frac{7}{44}$

[읽을거리]

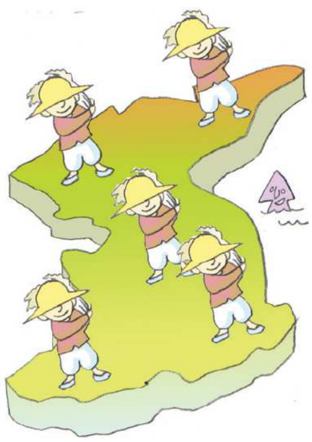
1. 지수표현은 왜 필요한가?

다음 그림의 푸딩의 개수를 세어 보자.

첫 번째 그림에서 푸딩이 4개라는 것은 한 눈에 알 수 있지만, 두 번째 그림에서는 처음부터 하나씩 세어 나가지 않고는 푸딩이 10개라는 것을 금방 알아낼 수 없다. 이처럼 인간이 수의 크기를 한 눈에 식별할 수 있는 능력에는 한계가 있기 때문에 아주 큰 수나 아주 작은 수를 표현할 때, 그 크기를 보다 명확하게 보여 줄 수 있는 방법을 찾게 된다.

아주 큰 수나 아주 작은 수의 상대적 크기를 한 눈에 알아볼 수 있는 방법이 바로 지수 표현이다. 지수표현은 큰 수 300000000000을 3×10^{11}으로, 작은 수 0.0000000000009는 $9\times\frac{1}{10^{13}}$과 같이 적기로 한 수학적 약속이다. 이와 같이 지수를 사용하면 크기를 명확하게 보여줄 수 있을 뿐만 아니라, 같은 수를 여러 번 써야하는 번거로움도 피할 수 있으며, 아무리 큰 수나 작은 수의 곱셈, 나눗셈도 지수법칙을 이용하면 쉽게 계산할 수 있는 장점이 있다.

예를 들어, 지구에는 약 6×10^9명의 인구가 살고 있는데, 사람의 머리카락 수가 평균 1.8×10^5개이므로 지구에 있는 모든 인간의 머리카락 수는 대략
$(6\times10^9)\times(1.8\times10^5)=1.08\times10^{15}$개가 된다.



[출처 : 수학사랑, 「이런 수업 어때요 8-가」]