

100 문제를 푸는 것보다 **원리**를 가르칩니다!

중·고등 고난도 수학적 사고 시스템 및 이론 확립

(KMO · 과학고 · 영재고 · 자사고 대비서)

도전 원리탐구

Challenge
the Discovery of
Dharma Series D
(대수 · 해석)

저자 최경호 지음



홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이

원리탐구

차례

서문, 수학공부 어떻게 할 것인가?	1
제 1강 수열(1)	7
제 2강 수열(2), 함수(1)	37
제 3강 함수(2)	65
제 4강 방정식	91
제 5강 부등식	121

신판을 내면서

2005년부터 펴내기 시작한 원리탐구 시리즈를 2010년 신판개정판에 이어 2011(정수론), 2012년(기하·신이론), (해석)에 기존의 도전원리탐구를 시대의 변화에 맞추어 전면적인 내용의 보강과 변화를 하였습니다.

공부대상은 신판 수학 원리탐구 I·II·III·IV·V는 초·중학생의 수학적 사고 시스템과 이론 확립에, 도전 원리탐구 A(정수론), B(기하), C(조합론), D(해석)은 **중·고등학생의 고난이도 수학적사고력 및 이론 확립과 KMO 및 민사고 경시의 이론적 기반확립**에 중점을 두었습니다. 따라서 고등학교에서 문과를 지망하는 학생은 신판 수학 원리탐구 I·II·III·IV·V까지 공부하면 되고, 특목고 및 이과 지망생은 도전 원리탐구 A·B·C·D를 공부하면 됩니다.

앞으로 질 높은 강의와 더 많은 노력을 통하여 더욱 이해하기 쉬운 도전 원리탐구가 될 수 있도록 계속적으로 보완·교정해 나갈 것을 약속드립니다.

2012년 1월 수학 원리탐구학원

100 문제를 주는 것 보다
문제를 주는 1가지 원리를 가르칩니다!

수학공부 어떻게 할 것인가?

흔히 우리 학생과 부모님(선생님)들은 너무도 효율보다는 양에 집착하여 수학문제를 많이 풀어야하고 오랜 동안 책상에서 바른 자세로 공부해야하고 숙제가 많아야 하며, 공식을 잘 외우고 모르는 문제는 자주 질문을 해야 하며 복잡한 문제도 끝까지 노동을 해서라도 풀어야한다는 생각을 가진 분이 의외로 많다. 또한 선생님은 자세하고 화려한 설명과 즉답제 같은 적중률을 가져야하며 질문에 아주 친절하고 자세하게 대답해야 유능한 선생이라고 생각하는 분들도 또한 의외로 많다. 이와 같은 생각을 시대의 변화, 개성의 존중, 효율성과 능률, 시험방식의 변화 등을 고려하여 다시 생각해보아야 한다.

현대의 사회는 이전의 사회와 비교해 많은 변화가 있어 이전의 시대와 다른 지식과 인재를 요구한다. 즉 (i) 정적인 사회에서 동적인 정보통신혁명기에 적응할 수 있는 새로운 지식과 상황적응력, 응용력을 가져야한다. (ii) 일률적 획일적 사회에서 개성존중의 사회로 변화하므로 자신만의 독특한 성격과 특성을 더욱 발전시켜야한다. (iii) 형식보다 실질을 중요하게 여기므로 형식과 격식에 얽매이지 말고 효율적이고 실질적인 공부를 하여야한다. (iv) 따라서 이전의 객관식 단답형에서 주관식 서술형으로 더 나아가 논술구술 문제, 심층면접 및 입학사정관제로 변함에 유의하여 공부 방법을 달리하고 변화에 민감하게 대처하지 않으면 자신의 능력을 충분히 발휘되지 않음을 명심하여야 한다.

10여년의 수학강의와 상담을 통해서 공부를 잘하는 학생과 잘하지 못하는 학생들을 보면서 느꼈던 수학에 관한 생각과 경험을 하지 말아야할 것 4가지(4불)와 해야 할 것 5가지(5행)로 구분하였다. 이것을 바탕으로 자신의 개성에 맞는 공부 방법을 터득해 나아갈 수 있기를 바란다.

[※ 4불의 (1) ‘같은 유형의 문제를 반복하여 많이 풀지 마라.’의 해결 방법은 5행의 (1) ‘생각을 많이 하라.’이다. 이와 같이 4불과 5행의 같은 번호를 연결하여 이해하기 바란다.)

1. 4불(不)

(1) 같은 유형의 문제를 반복하여 많이 풀지 마라.

시대가 빠르게 변화해 가므로 이 시대에 적응할 수 있는 창의력이 요구되고 개성이 존중되는 시대이다. 이것이 자신의 발전, 더 나아가 사회의 발전에 도움이 되기 때문이다. 같은 유형을 되풀이하여 풀다보면 그 문제는 그렇게 풀어야한다는 기계적인 습성이 붙게 된다. 비교적 난이도가 적은 학교 시험에서는 고득점의 요인이 되겠지만, 심도 높은 시험에는 여러 각도로 응용되고 여러 원리가 융합되어 나오기 때문에 기계적인 학습에 의해 학교시험은 100점을 맞아도 영재센터·국제중·KMO등의 각종올림피아드·과학고를 비

2. 5행(行)

(1) 생각을 많이 하라.

많은 문제를 푸는 것이 아니라 많은 다양한 생각을 하여야한다. 앞에서 언급 하였듯이 수학은 다양하고 깊은 생각을 하는 학문이며 나아가 그를 통해서 새로운 문제를 해결하는 응용력과 새로운 것을 창조하는 능력을 기르는 학문이다. 많은 문제를 풀어 기계적인 생각을 하게 되는 것은 수학을 포기하는 행위이다. 많은 문제를 풀어서 그 중에 몇 문제가 나와 시험을 잘 보는 것보다는 **다양한 생각으로 어떠한 문제라도 풀 수 있는 능력을 기르는 것이** 수학을 잘하는 비결임을 알아야한다.

단순하거나, 쉽게 풀 수 있는 문제는 빠르고 정확하게 푼 다음 어려운 문제에 많은 시간을 할애하여 생각을 깊게 하면 처음 적응하는데 시간이 걸리겠지만 습관이 되면 푼 문제의 수가 적고 시간이 덜 걸리더라도 고득점을 할 수 있으며 장기적으로 학년이 높아갈수록 수학성적이 좋아지며, 놀 수 있는 시간이 많아진다. 즉 **많은 문제를 푸는 것보다 많은 생각을 하여야 한다.**

(2) 과정에 충실 하라.

과정 없이 공식을 외워서 문제풀이에 적용하는 것은 자신의 지식이 되지 않는다. 조금이라도 변형된 문제나 응용력이 요구되는 문제가 나올 경우 당황하게 되고, 특히 평면에서 사용되는 공식은 나오는 과정에 대한 근원적인 이해 없이는 공간에 적용하지 못한다. 즉 지식은 많으나 그 지식을 어디에 어떻게 쓰는지 모르면 그 지식이 많아짐에 따라 뇌 속에서 그 지식은 쓰레기가 되어 공부를 점점 못하게 되는 요인이 된다. 우리 주위에 공부를 많이 했으나 공부를 점점 못해가는 학생을 흔히 볼 수 있다. 따라서 단순한 지식의 암기를 피하고 그 공식이 나오는 과정을 깊이 있게 생각해야한다. 그 과정에 대한 이해는 차원이 다를 때 그 과정을 차원에 맞게 적용하여 스스로 공식을 만들 수 있고 변형된 문제가 나올 경우 과정을 변형하여 응용력을 기를 수 있다. 그래야만 진정한 자신의 지식이 되고 섣된 공식을 잠시 잊었어도 생각하여 머릿속에서 공식을 만들어 내게 된다. 단순한 공식의 암기는 응용력과 창의력을 죽여 시간이 갈수록 점점 공부를 못하는 원인을 명심하고 그 과정에 충실하고 공식은 잊어버리는 것이 좋다.

(3) 혼자 해결하려 노력하고, 가르쳐 주는 습관을 가져라.

될 수 있는 한 모르는 부분은 혼자서 생각해보고 또 생각해봐야하며 또한 관련 서적을 보거나 인터넷을 검색하여 해결하려고 노력해야한다. 그래도 모르는 부분은 친구에게 물어보고 서로의 의견을 나누어본 다음 해결되지 않을 때 **최후의 방법으로 선생님에게 질문**하여야 한다.

아직 지식의 양이 적고 생각하는 방법에 익숙하지 않은 저학년의 경우 혼자 해결하기에

못한 특목고 시험에 좋은 성적을 내지 못함을 많이 보았다. 수학은 기계적인 풀이를 요하는 과목이 아니다. 다양한 생각의 방법을 탐구하고 이를 바탕으로 새로운 상황(문제)에 대처하는 능력을 기르는 학문이다. 당장의 시험점수에 연연하여 수많은 문제를 풀어 보는 것은 자칫 기계적인 인간을 만들어 창의력과 응용력을 죽이게 된다. 더 나아가 소중한 시간을 낭비하게 된다. 물론 수학에서 사칙연산이나 인수분해와 같은 기계적인 풀이가 필요한 부분도 다소 있다.

(2) 공식을 외우지마라.

수학은 암기과목이아니라 생각하는 방법을 체계적으로 연구하고 새롭고 다양한 상황에 효율적이고 신속히 대응하는 방법(응용력과 창의력)을 연구하는 학문이다. 이러한 연구에 의해 얻어진 산물 중의 하나인 공식을, 나오는 과정 없이 외워서 문제풀이에 적용하면 난이도가 낮은 단순한 시험에서는 단기간에 성적이 오를 수 있지만, 비교적 난이도가 있는 차원을 달리하는 시험문제에서는 낭패를 보게 된다. 더 나아가 장기적으로 단순한 시험에서도 성적이 점점 떨어져 학년이 올라가면서 수학을 포기하게 된다. 그 다음의 결과는 어떨것는가?

(3) 질문을 많이 하지마라.

흔히, 정적인 사회에서는 모르면 질문을 많이 그리고 빨리해서 짧은 시간에 많은 진도(양)를 이해·암기하여야 공부를 잘한다고 생각한다. 그러나 동적인 사회에서는 다양하고 깊이 있는 생각이 요구된다. 공부를 하다 모르는 부분이 있을 때 한번 생각하고, 그래도 모르면 또다시 생각하여 될 수 있는 한 혼자서 해결해야 한다. 모른다고 모르는 즉시 질문을 하게 되면 자신의 생각이 없어지며 생각의 깊이가 없어진다. 생각 없이 빨리 얻은 지식은 또한 빨리 잊게 마련이다.

(4) 노동하지마라.

어려워 보이고, 잘 풀리지 않는 문제를 풀 때 흔히 단편 지식으로 처음부터 일명 노동으로 풀어 많은 시간을 소요하여 푼 다음 만세를 부르는 학생이 있다. 차라리 그 시간에 나가 노는 편이 좋다. 어려워 보이고 잘 풀리지 않는 문제는 그 풀이 방법을 달리해 보는 습관을 길러야 한다. 어려운 문제라는 것은 그동안 알지 못한 지식이나 원리가 필요한 문제일 경우가 대부분이다. 따라서 다른 방법으로 풀려는 생각을 해야지 무턱대고 그동안 알고 있는 방법으로 단순 노동을 하지 말아야한다.

시간이 많이 걸리겠지만 생각하는 방법을 일깨워주고, 모르는 것을 스스로 알아내는 방법을 가르쳐주면 스스로 공부하는 습관이 길러져서 점점 질문의 양을 줄여나갈 수 있으며 그래야만 자신의 수학적 능력이 커지는 것이다.

또한 친구가 모르는 문제를 물어 왔을 때, 자신이 친구에게 가르쳐준다기보다는 토론의 대상이 되는 것이다. 가르치는 것은 두 번 배운 것과 같다는 말처럼 친구에게 가르쳐줌으로 해서 자신의 지식을 분명하게 하고, 그 부분에 대한 기억이 오래가며, 그 과정에서 논리력과 표현력이 향상됨을 잊어서는 안 된다. 즉 가르쳐준 만큼 친구에 이익이 되어 자신이 손해(?)가 되는 것이 아니라 가르쳐준 만큼 친구도 이익이고 본인은 지식이 명확해지고 표현력이 좋아져 두 배의 이익이 된다.

(4) 왜냐고 의문을 가져라.

문제가 어렵고 복잡해 보일 경우 생각 없이 노동으로 풀지 말고, 이 문제는 왜 어려워 보일까? 노동 이외의 다른 풀이 방법이 없을까를 연구하고 여러 가지 푸는 방법을 생각해 보아야 한다. 수학은 언뜻 보기에 어려워 보이는 문제를 쉽게 푸는 방법을 연구하고 풀이를 만들어가는 학문임을 명심하고, 어려운 문제는 반드시 쉽고 간단히 푸는 방법이 있는데, 본인이 잘 알지 못하고 있는 경우가 많으므로 스스로 그 방법을 터득하는 습관을 길러야만, 실전에서 어떠한 어려운 문제가 출제되더라도 풀 수 있다는 자신감을 갖게 되며 진정한 실력자가 된다.

(5) 겸손하며 수학(선생님)을 좋아(존경)하라.

사회생활의 직업에서도 그 직업이 마음에 들지 않으면 성공하기 힘들듯이 아무리 뛰어난 학생이라도 그 과목의 선생님 또는 과목이 싫으면 그 과목 공부에 집중이 되지 않고 능률이 오르지 않는다. 따라서 그 과목의 공부를 잘하려면 선생님을 좋아하려 노력해야 하고 뒤에 이야기하지만 선생님도 학생들이 좋아하도록 여러 가지 노력을 하여야 한다. 강의는 상호작용이므로 아무리 명 강의를 하여도 선생님이 싫으면 듣지 않고, 들려오지도 않는다. 한편 강의 실력이 좀 떨어지더라도 학생과 선생님 간에 신뢰가 생기면 내용이 머릿속에 잘 들어와 공부를 잘하게 된다. 따라서 선생님은 학생들에게 신뢰와 존경심이 들도록 항상 노력하고 학생들에게 애정 어린 관심과 조언을 하여야 하며, 학생은 설령 선생님이 거짓말을 하여도 참말처럼 들려야 공부를 잘 할 수 있다. 아무리 명강사라도 학생 스스로 선생님을 존경하려고 노력하고 노력을 하여도 되지 않으면 성적이 오르지 않을 것이므로 학원을 바꾸는 것이 좋다.

조금 안다고 남을 무시하고 선생님 설명을 듣지 않으면 아무리 좋은 두뇌라도 한계가 온다. 자신보다 저학년에게도 배울 수 있어야 하며 배우는 것을 부끄러워 말아야 한다. 항상 배우는 자세를 지녀야 자신이 발전한다. 공자님의 위대함은 자기보다 나이가 어리고 학문이 뒤진 사람에게도 배우는 자세를 가져야 한다고 강조한 것이다.

제 1장 수열(1)



1. 수열의 뜻

- (1) 수열: 어떤 규칙에 따라 차례로 늘어 놓은 수의 열
(2) 항: 수열을 이루고 있는 각 수를 항이라 한다. 이때 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항... 또는 제1항, 제2항, 제3항...으로 읽고 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 과 같이 나타낸다.
(3) 일반항: 수열에서 n 에 대한 식으로 나타낸 제 n 항 a_n 을 일반항이라 하고, 일반항이 a_n 인 수열을 간단히 $\{a_n\}$ 으로 나타낸다.
(4) 수열은 자연수 전체의 집합 N 을 정의역으로, 실수 전체의 집합 R 을 공역으로 하는 함수
 $f: N \rightarrow R, f(n) = a_n$ 으로 볼 수 있다.

EX. 1) 다음 수열의 일반항 a_n 을 구하여라.

- (1) 1, 8, 27, 64, ... (2) 9, 99, 999, 9999, ...

(풀이) (1) $a_1 = 1 = 1^3, a_2 = 8 = 2^3, a_3 = 27 = 3^3, a_4 = 64 = 4^3, \dots$

따라서 일반항은 $a_n = n^3$ 이다.

- (2) $a_1 = 9 = 10^1 - 1, a_2 = 99 = 10^2 - 1, a_3 = 999 = 10^3 - 1,$

$a_4 = 9999 = 10^4 - 1, \dots$

따라서 일반항은 $a_n = 10^n - 1$ 이다.

2. 등차수열

- (1) 등차수열: 첫째항에 차례로 일정한 수를 더하여 그 다음항이 얻어지는 수열
(2) 공차: 등차수열에서 더해지는 일정한수
(3) 등차수열의 일반항
① 첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열의 일반항은 a_n 은 다음과 같다.

EX. 2) 제3항이 11, 제9항이 29인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하여라.

(풀이) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = a + 2d = 11 \quad \dots\dots ①$$

$$a_9 = a + 8d = 29 \quad \dots\dots ②$$

- ①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 5, d = 3$$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$$

$$a_n = a + (n-1)d \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \dots)$$

② 등차중항

세수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루기 위한 필요충분조건은

100 문제를 주는 것 보다
문제를 주는 1가지 원리를 가르칩니다!

$$(\text{공차}) = b - a = c - b \Leftrightarrow 2b = a + c \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2} \text{이다.}$$

이때 b 를 a, c 의 등차중항이라 한다.

③ 등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은 S_n 은

$$\cdot \text{ 첫째항이 } a \text{이고 제 } n \text{항이 } l \text{일때, } S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

$$\cdot \text{ 첫째항이 } a \text{이고 공차가 } d \text{일때, } S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

3. 조화수열

(1) 조화수열의 뜻

수열 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ 에서 각 항의 역수열 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ 이 등차수열을

이룰 때, 수열 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ 을 조화수열이라고 한다. 즉, 어떤 수열의 각 항의 역수들이 등차수열을 이룰 때이다.

(2) 조화수열의 일반항

등차수열의 일반항의 역수이다.

$$\text{즉 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d \text{ 에서 } a_n \text{을 구한다. } (d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1})$$

(3) 조화중항

(1) 세 수 a, b, c 가 이 순서로 조화수열을 이룰 때 b 를 a, c 의 조화중항이라고 한다.

$$(2) \text{ 세 수 } a, b, c \text{가 조화수열을 이루면 } b = \frac{2ac}{a+c}$$

4. 등비수열

- (1) 등비수열: 첫째항에 차례로 일정한 수를 곱하여 그 다음 항이 얻어지는 수열
공비: 등비수열에서 곱해지는 일정한 수

(2) 등비수열의 일반항

$\cdot$ 첫째항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열의 일반항 a_n 은 다음과 같다.

$$\cdot a_n = ar^{n-1} \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \dots)$$

$\cdot$ 수열 $\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ 이 공비가 r 인 등비수열을 이루면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad (\text{단, } n=1,2,3,\dots)$$

EX. 3) 제2항이 12, 제5항이 324인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하여라.

(풀이) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2 = ar = 12 \quad \dots\dots ①$$

$$a_5 = ar^4 = 324 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 4, r = 3$$

따라서 첫째항이 4, 공비가 3이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$$

(3) 등비중항

세수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루기 위한 필요충분조건은

$$(\text{공비}) = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = ac \text{이다.}$$

이때 b 를 a, c 의 등비중항이라 한다.

(4) 등비수열의 합

첫째항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은,

$$r \neq 1 \text{ 일때, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$r = 1 \text{ 일때, } S_n = na$$

5. 수열의 합

(1) 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 으로 나타낸다. 즉,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

(2) 수열의 합과 일반항의 관계

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} \quad (\text{단 } n=2,3,4,\dots)$$

100 문제를 주는 것 보다
문제를 주는 1가지 원리를 가르칩니다!

6. 합의 기호 Σ

(1) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 기호 Σ 를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

EX. 1) 다음 식을 기호 Σ 를 써서 나타내시오.

$$(1) 1+3+5+\dots+101$$

$$(2) 1+2+2^2+\dots+2^{2009}$$

$$(\text{풀이}) (1) \sum_{k=1}^{51} (2k-1) \quad (2) \sum_{k=0}^{2009} 2^k \text{ 또는 } \sum_{k=1}^{2010} 2^{k-1}$$

(2) 기호 Σ 의 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 c 는 상수일때

$$① \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$② \sum_{k=1}^n c = cn$$

$$③ \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

(3) 자연수의 거듭제곱의 합과 Σ

$$① \sum_{k=1}^n k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$② \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$③ \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = (1+2+3+\dots+n)^2$$

$$④ \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\textcircled{5} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\textcircled{6} \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

EX. 2) $\sum_{k=1}^{20} (3k+1)(3k-1)$ 의 값을 구하시오.

(풀이) 답 25820

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{20} (3k+1)(3k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{20} (9k^2 - 1) = 9 \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^{20} 1 \\ &= 9 \cdot \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} - 1 \cdot 10 = 25820 \end{aligned}$$

7. 계차수열

(1) 계차: 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_{n+1} - a_n = b_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 을 그 수열의 계차라고 한다.

(2) 계차수열: 계차로 이루어진 수열 $\{b_n\}$ 을 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이라고 한다.

(3) 계차수열의 일반항

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라할 때

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ (단, } n=2, 3, 4, \dots \text{)}$$

EX. 3) 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, a_n 을 n 에 대한 식으로 나타내시오.

1, 2, 5, 10, 17, ...

(풀이) 답 $a_n = n^2 - 2n + 2$

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$\{a_n\}$: 1, 2, 5, 10, 17, ...

$\{b_n\}$: 1, 3, 5, 7, ...

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$b_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

$$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) = 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$\therefore a_n = n^2 - 2n + 2$$

100 문제를 푸는 것 보다
문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

8. 군 수열

(1) 군수열: 수열의 각 항들을 적당히 묶어 각 묶음들이 일정한 규칙성을 갖는 수열을 군수열이라 하고, 이때의 각 묶음을 차례로 제1군, 제2군, ...이라 한다.

(2) 군수열 푸는 방법

① 규칙을 찾아서 군으로 묶는다. (각 군의 항수는 수열을 이룬다.)

② 각 군의 초항을 비교하여 n 군의 초항을 찾는다.

③ n 군 안에서 규칙을 찾아 n 군의 일반항을 찾는다.

④ 전체의 합은 n 군의 합에 $\sum$ 를 취한다.

EX. 3) 다음 주어진 수열을 일정한 규칙에 따라 군수열로 묶어서 나타내시오.

$$(1) \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \dots$$

$$(2) \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \dots$$

(풀이) 답 풀이참조

$$(1) \left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right), \dots$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right), \dots$$

9. 멱수열과 멱급수

(1) 멱수열: 실수 x 와 수열 $\{a_n\}$ 이 있을 때, $a_n x^n$ 을 일반항으로 하는 수열을 멱수열이라 한다.

(2) 멱급수: 멱수열(등차수열 $\times$ 등비수열의 합 꼴)의 합을 멱급수라 하고 $S = \sum_{k=1}^n a_k x^k$ 으로 표기한다. 계수가 이루는 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열일 때 $S-xS$ 를 이용하여 S 를 계산할 수 있다.

10. 수학적 귀납법

(1) 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두가지를 보이면 된다.

① $n=1$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

② $n=k$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$ 일 때에도 명제 $p(n)$ 이 성립한다. 이와 같은 증명법을 수학적 귀납법이라고 한다.

1 탐구예제



자연수 $N=135791113 \cdots 297299$ 는 등차수열 $1, 3, 5, 7, \cdots$ 중 300 보다 작은 수를 순서대로 나열하여 만든 것이다. 이 자연수 N 의 왼쪽에서부터 100 번째 자리에 있는 숫자를 구하여라.

풀이 답: 0

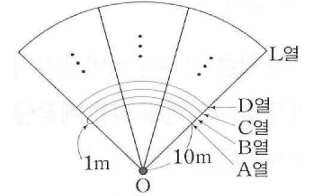
- (i) 일의 자리 수 : $1, 3, 5, 7, 9 \rightarrow 5$ 개
 (ii) 십의 자리 수 : $11, 13, 15, 17, \cdots, 99$ 는 숫자 한 개가 두 자리를 차지.
 첫째항이 11, 공차가 2 인 등차수열이므로
 $a_n = 11 + (n-1)2 = 99$ 에서 $\therefore n = 45 \rightarrow 45 \times 2 = 90$ 개
 (iii) 백의 자리 수 : $101, 103, 105, \cdots$ 는 숫자 한 개가 세 자리를 차지 $\rightarrow 5$ 개

$5 + 90 + 5 = 100$ 이므로 자연수 N 의 왼쪽에서부터 100 번째 자리에 있는 숫자는 103 의 가운데 숫자이다. $\therefore 0$

100 문제를 주는 것 보다
문제를 주는 1가지 원리를 가르칩니다!

유제 1

오른쪽 그림과 같이 어느 음악당의 객석은 무대 위의 한 점 O 에서 A 열 좌석까지의 거리는 $10m$ 이고 A 열부터 L 열까지 $1m$ 간격으로 12 열의 좌석이 배열되어 있다. A 열의 좌석 수는 50 석이며 각 열의 좌석 수는 그 열의 길이에 비례한다고 할 때, 전체 좌석 수를 구하여라.



2 탐구예제



-5와 15 사이에 n 개의 숫자 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 을 넣어 등차수열을 만들어
 $-5 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + 15 = 100$ 이 되게 할 때 이 수열의 공차를 구하여라.

풀이 답: $\frac{20}{19}$

항수는 $n+2$ 개이고 15가 $n+2$ 항이 된다.

수열 $-5, a_1, a_2, \dots, a_n, 15$ 는

항수 $n+2$, 첫째항 -5 , 끝항 15 인 등차수열이 되므로

등차수열의 합 $S_n = \frac{n(a+l)}{2}$ 에 대입하면

$$S_{n+2} = \frac{(n+2)(-5+15)}{2} = 100$$

$$5(n+2) = 100 \quad \therefore n = 18$$

또 15는 20 번째 항이므로 $-5 + (20-1)d = 15$

$$\therefore d = \frac{20}{19}$$

100 문제를 주는 것 보다
 문제를 주는 1가지 원리를 가르칩니다!

유제 2

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 + 2n$ 일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99}$ 의 값을 구하여라.

3 탐구예제



등비수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ 에서 이 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 2 와의 차가 처음으로 0.01 보다 작아지는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

풀이 답: 8

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $r = \frac{1}{2}$ 이므로

$$S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left\{ 1 - (\frac{1}{2})^n \right\} \quad \therefore S_n = 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$2 - S_n = \frac{1}{2^{n-1}} < 0.01 \quad \text{에서} \quad 2^{n-1} > 100$$

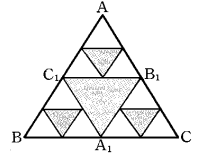
$$2^7 = 128, 2^8 = 256 \quad \text{이므로} \quad n-1 \geq 7 \quad \text{에서} \quad n \geq 8$$

$\therefore$ 최소의 자연수는 8

100 문제를 푸는 것 보다
문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

유제 3

한 변의 길이가 2 인 정삼각형 모양의 종이 ABC 가 있다. 이 때, 각 변의 중점을 이어서 만든 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 을 오려내고, 또 다시 나머지 3 개의 정삼각형 모양에서도 같은 방법으로 만든 정삼각형을 오려낸다. 이와 같은 방법을 처음부터 10 회 반복 시행한 후 남아 있는 종이의 넓이를 구하여라.



4 탐구예제



분모가 $n(n=1, 2, 3, \dots, 100)$ 일 때, 분자가 $1, 2, 3, \dots, n$ 인 수열 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \dots, \frac{100}{100}$ 이 있다. 이 수열에서 $\frac{1}{k}$ 과 값이 같은 항의 개수를 $a_k(k=1, 2, 3, 4, \dots, 100)$ 이라 할 때, $a_k=6$ 을 만족하는 모든 k 의 값의 합을 구하여라.

풀이 답: 31

$a_k=6$ 의 의미는 $\frac{1}{k}$ 과 값이 같은 항의 개수가 6 개라는 의미이다.

$a_1=1$ 과 같은 항의 개수 $\rightarrow 100$ 개 $\therefore a_{100}=100$

$a_2=\frac{1}{2}$ 과 같은 항의 개수 $=\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots, \frac{50}{100} \rightarrow 50$ 개 $\therefore a_2=50$

이런 식으로 하면

$a_3=33, a_4=25, a_5=20, \dots, a_{14}=7, a_{15}=6, a_{16}=6$

따라서 $a_{15}=a_{16}=6$ 이므로 $k=15$ 또는 $k=16$

$\therefore 15+16=31$

100 문제를 주는 것 보다
문제를 주는 1가지 원리를 가르칩니다!

유제 4

자연수 n 을 $[^3\sqrt{n}]$ 으로 나누었을 때, 나머지가 1 인 n 의 값들을 작은 것부터 차례로

$a_1, a_2, a_3, \dots$ 라고 하자. 이 때, a_{20} 의 값을 구하여라. (단 $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

5 탐구예제



수열 a_n 을 $a_n = 3^n - 10 \left\lfloor \frac{3^n}{10} \right\rfloor$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 으로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{50} a_n$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

풀이 답: 252

$$a_1 = 3 - 10 \left\lfloor \frac{3}{10} \right\rfloor = 3 - 10 \times 0 = 3,$$

$$a_2 = 9 - 10 \left\lfloor \frac{9}{10} \right\rfloor = 9 - 10 \times 0 = 9,$$

$$a_3 = 27 - 10 \left\lfloor \frac{27}{10} \right\rfloor = 27 - 10 \times 2 = 7,$$

$$a_4 = 81 - 10 \left\lfloor \frac{81}{10} \right\rfloor = 81 - 10 \times 8 = 1,$$

$$a_5 = 243 - 10 \left\lfloor \frac{243}{10} \right\rfloor = 243 - 10 \times 24 = 3, \dots$$

즉, a_n 은 3^n 의 일의 자리 수이고, 3, 9, 7, 1 이 차례대로 반복된다.

$$\sum_{n=1}^{50} a_n = 12(3+9+7+1) + 3+9 = 252$$

100 문제를 푸는 것 보다
문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

유제 5

어떤 사람이 컴퓨터 키보드에 자연수를 차례로 홀수 번째 수는 왼손 검지로 짝수 번째 수는 오른손 검지로 한 숫자씩 치는 일명 독수리 타법으로 다음과 같이 순서대로 쳐 나간다.

1	2	3	...	8	9	1	0	1	1	1	2	...
↑	↑	↑		↑	↑	↑	↑	↑				
왼	오	왼		오	왼	오	왼	오				
손	른	손	...	른	손	른	손	른				...

1 부터 100 까지 수를 연속하여 쳤을 때 오른손 검자로 친 각 숫자의 합을 구하여라.

6 탐구예제



자연수 k 에 대하여 a_k 가 세 수 $0, 1, 2$ 중 하나의 값을 가질 때, $\sum_{n=1}^{10} 3^{n-1} a_n = 209$ 가

성립한다. 이 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n^2$ 의 값을 구하여라.

풀이 답: 13

$209 = a_1 \times 3^0 + a_2 \times 3^1 + a_3 \times 3^2 + \dots$ 으로 표현하라는 뜻이므로

209를 3진법의 수로 나타낸다.

$$209 = 21202_{(3)} = 2 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2$$

$$a_5 = 2, a_4 = 1, a_3 = 2, a_1 = 2$$

$$a_2 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = 0$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 = 13$$

100 문제를 주는 것 보다
문제를 주는 1가지 원리를 가르칩니다!

유제 6

자연수 n 에 대하여 x^n 을 $x-2$ 로 나눈 몫을 $Q_n(x)$ 라 하자 $Q_n(x)$ 의 계수의 합을 S_n 이

라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} S_n$ 의 값을 구하여라.

7 탐구예제



수열의 합 $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2012}$ 의 값을 구하여라.

풀이 답: $\frac{4024}{2013}$

먼저 일반항을 구하여 부분분수로 나누면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1+2+3+\dots+n} \\ &= \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

이 수열의 2012항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= \sum_{k=1}^{2012} 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} \right) \right\} \\ &= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2013} \right) = \frac{4024}{2013} \end{aligned}$$

100 문제를 푸는 것 보다
문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

유제 7

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{f(k)}$ 의 값을 구하여라.

8 탐구예제



수열 $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^{n-1}}$ 의 합을 구하여라.

풀이 답: $\frac{9}{4} - \left(\frac{3}{4} + \frac{n}{2}\right) \times \frac{1}{3^{n-1}}$

이 급수는 등비수열의 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 멱급수이다.

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-2}} + \frac{n}{3^{n-1}} = S_n \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠의 각항에 $\frac{1}{3}$ 를 곱하면

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} S_n \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠ - ㉡ 하면

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{2}{3} S_n$$

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n} = \frac{2}{3} S_n, \quad \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} - \frac{n}{3^n} = \frac{2}{3} S_n$$

$$\text{이를 정리하면 } S_n = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} \times \frac{1}{3^n} - \frac{n}{2 \times 3^{n-1}} = \frac{9}{4} - \left(\frac{3}{4} + \frac{n}{2}\right) \times \frac{1}{3^{n-1}}$$

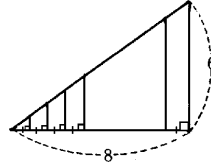
100 문제를 푸는 것 보다
문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

유제 8

수열의 합 $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{10}{2^{10}}$ 을 구하여라.

종합문제>>>

1. 다음 그림과 같이 밑변, 높이가 각각 8, 6 인 직각삼각형의 내부에 높이와 평행한 n 개의 선분을 간격이 일정하게 그을 때, 이 n 개의 선분의 길이의 총합을 구하여라.



2. 공비가 $-\sqrt{2}$ 인 등비수열 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -22$ 일 때 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8$ 의 값을 구하여라.

100 문제를 주는 것 보다
문제를 주는 1가지 원리를 가르칩니다!

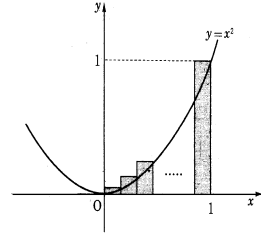
3. 두 자연수 a, b 사이에 10 개의 수 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 을 넣어서 만들어진 수열 $a, x_1, x_2, \dots, x_{10}, b$ 는 등비수열이다. 이 때, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_{10}$ 의 값을 a, b 로 나타내어라.

4. 다음 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 및 a_n 을 구하여라.

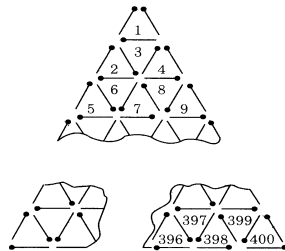
$$12, 6, 4, 3, \dots, a_{10}, \dots, a_n$$

Challenge
The discovery of dharma series D(대수·해석)

5. 그림과 같이 구간 $0 \leq x \leq 1$ 을 10 등분하여 곡선 $y = x^2$ 위에 한 꼭지점이 있는 10 개의 직사각형을 그린다. 이들 10 개의 직사각형의 넓이의 합을 S 라 할 때, $10S$ 의 값을 구하여라.



6. 다음 그림과 같이 정삼각형 모양으로 성냥개비를 배열할 때, 작은 정삼각형의 개수가 400이면 이 도형을 이루고 있는 성냥개비의 총 개수를 구하여라.



100 문제를 푸는 것 보다
문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

7. $m + n = 48$, $mn = 20$ 일 때, $\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n (i+j) \right)$ 의 값을 구하여라.

8. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = (2n-1)^2$ 으로 나타내어질 때, $\sum_{k=1}^{100} \sqrt{a_k} - \sqrt{a_k-1}$ 의 값을 구하여라.

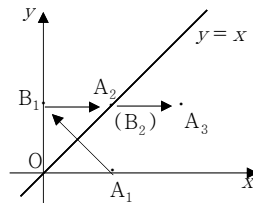
9. 그림과 같은 표 안의 각 빈 칸에 가로줄의 수와 세로줄의 수의 곱을 써 넣기로 한다. 예를 들어 ㉠, ㉡, ㉢에는 각각 2, 12, 60을 써 넣는다. 가운데 부분의 빈 칸에 써 넣을 모든 수들의 합을 구하여라.

×	1	2	3	4	...	20
1		㉠				
2						
3				㉡		
4						
⋮						
20			㉢			

10. 좌표평면 위에서 점 $A_1(1, 0)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B_1 이라 하고, 점 B_1 을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 A_2 라고 하자.

이와 같이 점 $A_n(n=1, 2, 3, \dots)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B_n 이라 하고, 점 B_n 을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 A_{n+1} 이라 고 하자.

이 때, 점 A_{2003} 의 좌표를 구하여라.



100 문제를 주는 것 보다
문제를 주는 1가지 원리를 가르칩니다!

11. 어떤 수를 크기순으로 나열하여 아래와 같은 수열을 만들었다.

1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, 111, 112, 113, 121, ...

이 수열의 제 200 항을 구하여라.

12. 다음 수열의 일반항 $\{a_n\}$ 을 구하여라.

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 5 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$