

100 문제를 푸는 것보다 **원리**를 가르칩니다!

중 · 고등 **고난도** 수학적 사고 시스템 및 이론 확립

(KMO · 과학고 · 영재고 · 자사고 대비서)

도전 원리 탐구

Challenge
the Discovery of
Dharma Series C
(조합론)

저자 최경호 지음



홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이

원리탐구

차 례

서문, 수학공부 어떻게 할 것인가?	3
제 1강 경우의 수 · 순열과 조합(1)	7
제 2강 경우의 수 · 순열과 조합(2)	35
제 3강 이항정리(1)	63
제 4강 이항정리(2) 확률(1)	91
제 5강 확률(2)	119

신판을 내면서

2005년부터 펴내기 시작한 원리탐구 시리즈를 2010년 신판개정판에 이어 2011(정수론), 2012년(기하·신이론), (해석)에 기존의 도전원리탐구를 시대의 변화에 맞추어 전면적인 내용의 보강과 변화를 하였습니다.

공부대상은 신판 수학 원리탐구 I · II · III · IV · V는 초·중학생의 수학적 사고 시스템과 이론 확립에, 도전 원리탐구 A(정수론), B(기하), C(조합론), D(해석)은 **중·고등학생의 고난이도 수학적사고력 및 이론 확립과 KMO 및 민사고 경시의 이론적 기반확립**에 중점을 두었습니다. 따라서 고등학교에서 문과를 지망하는 학생은 신판 수학 원리탐구 I · II · III · IV · V까지 공부하면 되고, 특목고 및 이과 지망생은 도전 원리탐구 A · B · C · D를 공부하면 됩니다.

앞으로 질 높은 강의와 더 많은 노력을 통하여 더욱 이해하기 쉬운 도전 원리탐구가 될 수 있도록 계속적으로 보완·교정해 나갈 것을 약속드립니다.

2012년 2월 수학 원리탐구학원

수학공부 어떻게 할 것인가?

흔히 우리 학생과 부모님(선생님)들은 너무도 효율보다는 양에 집착하여 수학문제를 많이 풀어야하고 오랜 동안 책상에서 바른 자세로 공부해야하고 숙제가 많아야 하며, 공식을 잘 외우고 모르는 문제는 자주 질문을 해야 하며 복잡한 문제도 끝까지 노동을 해서라도 풀어야한다는 생각을 가진 분이 의외로 많다. 또한 선생님은 자세하고 화려한 설명과 즉흥적 같은 적중률을 가져야하며 질문에 아주 친절하고 자세하게 대답해야 유능한 선생이라고 생각하는 분들도 또한 의외로 많다. 이와 같은 생각을 시대의 변화, 개성의 존중, 효율성과 능률, 시험방식의 변화 등을 고려하여 다시 생각해보아야 한다.

현대의 사회는 이전의 사회와 비교해 많은 변화가 있어 이전의 시대와 다른 지식과 인재를 요구한다. 즉 (i) 정적인 사회에서 동적인 정보통신혁명기에 적응할 수 있는 새로운 지식과 상황적응력, 응용력을 가져야한다. (ii) 일률적 획일적 사회에서 개성존중의 사회로 변화하므로 자신만의 독특한 성격과 특성을 더욱 발전시켜야한다. (iii) 형식보다 실질을 중요하게 여기므로 형식과 격식에 얽매이지 말고 효율적이고 실질적인 공부를 하여야한다. (iv) 따라서 이전의 객관식 단답형에서 주관식 서술형으로 더 나아가 논술구술 문제, 심층면접 및 입학사정관제로 변함에 유의하여 공부 방법을 달리하고 변화에 민감하게 대처하지 않으면 자신의 능력을 충분히 발휘되지 않음을 명심하여야 한다.

10여년의 수학강의와 상담을 통해서 공부를 잘하는 학생과 잘하지 못하는 학생들을 보면서 느꼈던 수학에 관한 생각과 경험을 하지 말아야할 것 4가지(4불)와 해야 할 것 5가지(5행)로 구분하였다. 이것을 바탕으로 자신의 개성에 맞는 공부 방법을 터득해 나아갈 수 있기를 바란다.

[※ 4불의 (1) ‘같은 유형의 문제를 반복하여 많이 풀지 마라.’의 해결 방법은 5행의 (1) ‘생각을 많이 하라.’이다. 이와 같이 4불과 5행의 같은 번호를 연결하여 이해하기 바란다.]

1. 4불(不)

(1) 같은 유형의 문제를 반복하여 많이 풀지 마라.

시대가 빠르게 변화해 가므로 이 시대에 적응할 수 있는 창의력이 요구되고 개성이 존중되는 시대이다. 이것이 자신의 발전, 더 나아가 사회의 발전에 도움이 되기 때문이다. 같은 유형을 되풀이하여 풀다보면 그 문제는 그렇게 풀어야한다는 기계적인 습성이 붙게 된다. 비교적 난이도가 적은 학교 시험에서는 고득점의 요인이 되겠지만, 심도 높은 시험에는 여러 각도로 응용되고 여러 원리가 융합되어 나오기 때문에 기계적인 학습에 의해 학교시험은 100점을 맞아도 영재센터·국제중·KMO등의 각종올림피아드·과학고를 비

2. 5행(行)

(1) 생각을 많이 하라.

많은 문제를 푸는 것이 아니라 많은 다양한 생각을 하여야한다. 앞에서 언급 하였듯이 수학은 다양하고 깊은 생각을 하는 학문이며 나아가 그를 통해서 새로운 문제를 해결하는 응용력과 새로운 것을 창조하는 능력을 기르는 학문이다. 많은 문제를 풀어 기계적인 생각을 하게 되는 것은 수학을 포기하는 행위이다. 많은 문제를 풀어서 그 중에 몇 문제가 나와 시험을 잘 보는 것보다는 **다양한 생각으로 어떠한 문제라도 풀 수 있는 능력을 기르는 것이** 수학을 잘하는 비결임을 알아야한다.

단순하거나, 쉽게 풀 수 있는 문제는 빠르고 정확하게 푼 다음 어려운 문제에 많은 시간을 할애하여 생각을 깊게 하면 처음 적응하는데 시간이 걸리겠지만 습관이 되면 푼 문제의 수가 적고 시간이 덜 걸리더라도 고득점을 할 수 있으며 장기적으로 학년이 높아갈수록 수학성적이 좋아지며, 놀 수 있는 시간이 많아진다. 즉 **많은 문제를 푸는 것보다 많은 생각을 하여야 한다.**

(2) 과정에 충실 하라.

과정 없이 공식을 외워서 문제풀이에 적용하는 것은 자신의 지식이 되지 않는다. 조금이라도 변형된 문제나 응용력이 요구되는 문제가 나올 경우 당황하게 되고, 특히 평면에서 사용되는 공식은 나오는 과정에 대한 근원적인 이해 없이는 공간에 적용하지 못한다. 즉 지식은 많으나 그 지식을 어디에 어떻게 쓰는지 모르면 그 지식이 많아짐에 따라 뇌 속에서 그 지식은 쓰레기가 되어 공부를 점점 못하게 되는 요인이 된다. 우리 주위에 공부를 많이 했으나 공부를 점점 못해가는 학생을 흔히 볼 수 있다. 따라서 단순한 지식의 암기를 피하고 그 공식이 나오는 과정을 깊이 있게 생각해야한다. 그 과정에 대한 이해는 차원이 다를 때 그 과정을 차원에 맞게 적용하여 스스로 공식을 만들 수 있고 변형된 문제가 나올 경우 과정을 변형하여 응용력을 기를 수 있다. 그래야만 진정한 자신의 지식이 되고 설텁 공식을 잠시 잊었어도 생각하여 머릿속에서 공식을 만들어 내게 된다. 단순한 공식의 암기는 응용력과 창의력을 죽여 시간이 갈수록 점점 공부를 못하는 원인을 명심하고 그 과정에 충실하고 공식은 잊어버리는 것이 좋다.

(3) 혼자 해결하려 노력하고, 가르쳐 주는 습관을 가져라.

될 수 있는 한 모르는 부분은 혼자서 생각해보고 또 생각해봐야하며 또한 관련 서적을 보거나 인터넷을 검색하여 해결하려고 노력해야한다. 그래도 모르는 부분은 친구에게 물어보고 서로의 의견을 나누어본 다음 해결되지 않을 때 **최후의 방법으로 선생님에게 질문**하여야 한다.

아직 지식의 양이 적고 생각하는 방법에 익숙하지 않은 저학년의 경우 혼자 해결하기에

못한 특목고 시험에 좋은 성적을 내지 못함을 많이 보았다. 수학은 기계적인 풀이를 요하는 과목이 아니다. 다양한 생각의 방법을 탐구하고 이를 바탕으로 새로운 상황(문제)에 대처하는 능력을 기르는 학문이다. 당장의 시험점수에 연연하여 수많은 문제를 풀어 보는 것은 자칫 기계적인 인간을 만들어 창의력과 응용력을 죽이게 된다. 더 나아가 소중한 시간을 낭비하게 된다. 물론 수학에서 사칙연산이나 인수분해와 같은 기계적인 풀이가 필요한 부분도 다소 있다.

(2) 공식을 외우지마라.

수학은 암기과목이아니라 생각하는 방법을 체계적으로 연구하고 새롭고 다양한 상황에 효율적이고 신속히 대응하는 방법(응용력과 창의력)을 연구하는 학문이다. 이러한 연구에 의해 얻어진 산물 중의 하나인 공식을, 나오는 과정 없이 외워서 문제풀이에 적용하면 난이도가 낮은 단순한 시험에서는 단기간에 성적이 오를 수 있지만, 비교적 난이도가 있는 차원을 달리하는 시험문제에서는 낭패를 보게 된다. 더 나아가 장기적으로 단순한 시험에서도 성적이 점점 떨어져 학년이 올라가면서 수학을 포기하게 된다. 그 다음의 결과는 어떨것는가?

(3) 질문을 많이 하지마라.

흔히, 정적인 사회에서는 모르면 질문을 많이 그리고 빨리해서 짧은 시간에 많은 진도(양)를 이해·암기하여야 공부를 잘한다고 생각한다. 그러나 동적인 사회에서는 다양하고 깊이 있는 생각이 요구된다. 공부를 하다 모르는 부분이 있을 때 한번 생각하고, 그래도 모르면 또다시 생각하여 될 수 있는 한 혼자서 해결해야 한다. 모른다고 모르는 즉시 질문을 하게 되면 자신의 생각이 없어지며 생각의 깊이가 없어진다. 생각 없이 빨리 얻은 지식은 또한 빨리 잊게 마련이다.

(4) 노동하지마라.

어려워 보이고, 잘 풀리지 않는 문제를 풀 때 흔히 단편 지식으로 처음부터 일명 노동으로 풀어 많은 시간을 소요하여 푼 다음 만세를 부르는 학생이 있다. 차라리 그 시간에 나가 노는 편이 좋다. 어려워 보이고 잘 풀리지 않는 문제는 그 풀이 방법을 달리해 보는 습관을 길러야 한다. 어려운 문제라는 것은 그동안 알지 못한 지식이나 원리가 필요한 문제일 경우가 대부분이다. 따라서 다른 방법으로 풀려는 생각을 해야지 무턱대고 그동안 알고 있는 방법으로 단순 노동을 하지 말아야한다.

시간이 많이 걸리겠지만 생각하는 방법을 일깨워주고, 모르는 것을 스스로 알아내는 방법을 가르쳐주면 스스로 공부하는 습관이 길러져서 점점 질문의 양을 줄여나갈 수 있으며 그래야만 자신의 수학적 능력이 커지는 것이다.

또한 친구가 모르는 문제를 물어 왔을 때, 자신이 친구에게 가르쳐준다기보다는 토론의 대상이 되는 것이다. 가르치는 것은 두 번 배운 것과 같다는 말처럼 친구에게 가르쳐줌으로 해서 자신의 지식을 분명하게 하고, 그 부분에 대한 기억이 오래가며, 그 과정에서 논리력과 표현력이 향상됨을 잊어서는 안 된다. 즉 가르쳐준 만큼 친구에 이익이 되어 자신이 손해(?)가 되는 것이 아니라 가르쳐준 만큼 친구도 이익이고 본인은 지식이 명확해지고 표현력이 좋아져 두 배의 이익이 된다.

(4) 왜냐고 의문을 가져라.

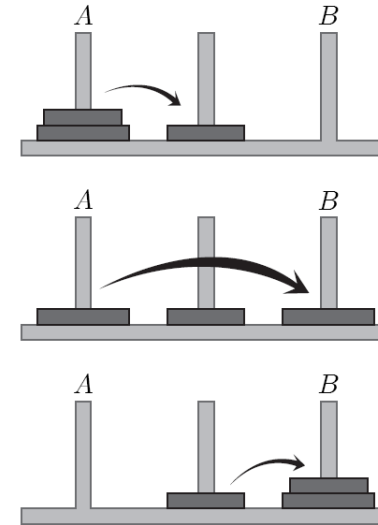
문제가 어렵고 복잡해 보일 경우 생각 없이 노동으로 풀지 말고, 이 문제는 왜 어려워 보일까? 노동 이외의 다른 풀이 방법이 없을까를 연구하고 여러 가지 푸는 방법을 생각해 보아야 한다. 수학은 언뜻 보기에 어려워 보이는 문제를 쉽게 푸는 방법을 연구하고 풀이를 만들어가는 학문임을 명심하고, 어려운 문제는 반드시 쉽고 간단히 푸는 방법이 있는데, 본인이 잘 알지 못하고 있는 경우가 많으므로 스스로 그 방법을 터득하는 습관을 길러야만, 실전에서 어떠한 어려운 문제가 출제되더라도 풀 수 있다는 자신감을 갖게 되며 진정한 실력자가 된다.

(5) 겸손하며 수학(선생님)을 좋아(존경)하라.

사회생활의 직업에서도 그 직업이 마음에 들지 않으면 성공하기 힘들듯이 아무리 뛰어난 학생이라도 그 과목의 선생님 또는 과목이 싫으면 그 과목 공부에 집중이 되지 않고 능률이 오르지 않는다. 따라서 그 과목의 공부를 잘하려면 선생님을 좋아하려 노력해야 하고 뒤에 이야기하지만 선생님도 학생들이 좋아하도록 여러 가지 노력을 하여야 한다. 강의는 상호작용이므로 아무리 명 강의를 하여도 선생님이 싫으면 듣지 않고, 들려오지도 않는다. 한편 강의 실력이 좀 떨어지더라도 학생과 선생님 간에 신뢰가 생기면 내용이 머릿속에 잘 들어와 공부를 잘하게 된다. 따라서 선생님은 학생들에게 신뢰와 존경심이 들도록 항상 노력하고 학생들에게 애정 어린 관심과 조언을 하여야 하며, 학생은 설령 선생님이 거짓말을 하여도 참말처럼 들려야 공부를 잘 할 수 있다. 아무리 명강사라도 학생 스스로 선생님을 존경하려고 노력하고 노력을 하여도 되지 않으면 성적이 오르지 않을 것이므로 학원을 바꾸는 것이 좋다.

조금 안다고 남을 무시하고 선생님 설명을 듣지 않으면 아무리 좋은 두뇌라도 한계가 온다. 자신보다 저학년에게도 배울 수 있어야 하며 배우는 것을 부끄러워 말아야 한다. 항상 배우는 자세를 지녀야 자신이 발전한다. 공자님의 위대함은 자기보다 나이가 어리고 학문이 뒤진 사람에게도 배우는 자세를 가져야 한다고 강조한 것이다.

제 1장 경우의 수 · 순열과 조합(1)



1. 순열

서로 다른 n 개에서 r 개를 택하여 일렬로 배열하는 것을 n 개에서 r 개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 ${}_nP_r$ 로 나타낸다.

2. 순열의 수

서로 다른 n 개에서 r 개를 택하여 일렬로 배열할 때, 첫째 자리에는 n 가지가 올 수 있고, 그 각각에 대하여 둘째 자리에는 $(n-1)$ 가지, 셋째 자리에는 $(n-2)$ 가지가 올 수 있다. 이와 같이 계속하면 r 째 자리에 올 수 있는 것은 $(n-r+1)$ 가지임을 알 수 있고, 곱의 법칙에 의해 결국 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 순열의 수는 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$ 이다. 특히, $r=n$ 일 때 ${}_nP_n$ 은 n 개 전체를 일렬로 나열한 순열의 수가 되어 ${}_nP_n = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ 을 n 의 계승이라 하며 $n!$ 로 나타낸다. 이제 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$ 의 우변에 $(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ 을 곱하고 나누면 ${}_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$

3. 중복순열

서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 뽑아 일렬로 배열하는 것을 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 ${}_n\Pi_r$ 로 나타낸다.

$${}_n\Pi_r = n \times n \times \cdots \times n = n^r$$

(1) Π 는 영어의 P 에 해당하는 그리스 문자(π 의 대문자)로 ‘파이’라고 읽는다.

(2) 순열의 수 ${}_nP_r$ 에서는 반드시 $n \geq r$ 이어야 하지만, 중복순열의 수 ${}_n\Pi_r$ 에서는

$n \geq r, n < r$ 의 어느 경우라도 경우의 수를 구할 수 있다.

(3) ${}_n\Pi_r$ 의 계산 $\Leftrightarrow n$: (사물의) 가짓수, r : 뽑는 개수

4. 조합

서로 다른 n 개에서 순서를 생각하지 않고 r 개를 택하는 것을 n 개에서 r 개를 택하는 조합이라 하고, 그 수를 ${}_nC_r$ 로 나타낸다.

5. 조합의 수

n 개에서 r 개를 뽑아 일렬로 배열하는 순열의 수는 n 개에서 r 개를 순서를 생각하지 않고 뽑은 후 그 r 개를 다시 일렬로 배열하는 방법의 수와 같다.

$$\therefore {}_nP_r = {}_nC_r \times r!$$

$$(1) {}_nC_0 = \frac{n!}{0!n!} = 1, {}_nC_n = \frac{n!}{n!0!} = 1, {}_nC_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

$$(2) {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, {}_nC_{n-r} = \frac{{}_nP_{n-r}}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\therefore {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

$$(3) {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} = \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\{(n-r)+r\}}{r!(n-r)!} = \frac{(n-1)! \times n}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r$$

$$(4) {}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} \quad (\text{단, } 1 \leq r < n)$$

6. 중복 조합

서로 다른 n 개의 원소 중에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 조합을 중복 조합이라고 한다. 이를 ${}_nH_r$ 과 같이 나타내고, ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 로 계산한다.

	중복을 허용하지 않을 경우	중복을 허용할 경우
순서를 생각할 경우	순 열	중복 순열
	${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$	${}_n\Pi_r = n^r$
순서를 생각하지 않을 경우	조 합	중복 조합
	${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!}$	${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

1 탐구예제



100 원짜리 동전 3 개, 50 원짜리 동전 3 개, 10 원짜리 동전 3 개를 가지고 지불할 수 있는 방법의 수를 A , 지불할 수 있는 금액의 수를 B 라 할 때, $A+B$ 의 값을 구하여라.

풀이 답: $A+B=102$

(i) 지불방법의 수

동전을 사용하지 않는 것도 지불 방법이 되므로 각 동전을 사용하는 경우의 수는

$3+1$ 가지이다. 그러나 금액이 모두 0 원이면 지불방법이 되지 못하므로,

$$\therefore A = (3+1)(3+1)(3+1) - 1 = 63$$

(ii) 지불 금액의 수

금액이 중복되어 있으므로 100 원짜리 동전 3 개를 50 원짜리 동전 6 개로 바꿔 생각한다.

즉, 50 원짜리 동전 9 개와 10 원짜리 동전 3 개로 지불할 수 있는 경우의 수를 계산하면 된다.

$$\therefore B = (9+1)(3+1) - 1 = 39$$

$$\therefore A+B=102$$

유제 1

12 개의 의자가 일렬로 놓여 있다. 이 의자에 A, B, C, D 의 4 명이 앉을 때, 어느 두 사람도 인접하지 않는 경우의 수를 구하여라.

2 탐구예제



A 반 4명, B 반 3명, C 반 2명을 일렬로 세울 때, 다음을 물음에 답하여라.

- (1) C 반 2명 사이에 두 사람을 끼워서 세우는 방법의 수
- (2) 같은 반끼리 이웃하여 세우는 방법의 수

풀이 답: (1) 60480 (가지) (2) 1728 (가지)

- (1) C 반 2명 사이에 2명을 세우는 방법은 ${}_7P_2$ (가지)

C 반 2명이 자리 바꾸는 방법은 2 (가지)

먼저 세운 4명이 이웃하여 나머지 5명과 일렬로 세우는 방법은 6! (가지)

$$\therefore {}_7P_2 \times 2! \times 6! = 60480 \text{ (가지)}$$

- (2) 각 반끼리 일렬로 세우는 방법은 각각 4!, 3!, 2! (가지)

A, B, C 반을 자리 바꾸는 방법은 3! (가지)

$$\therefore 3! \times (4! \times 3! \times 2!) = 1728 \text{ (가지)}$$

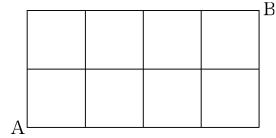
유제 2

1, 1, 1, 2, 2, 3의 숫자에서 네 개의 숫자를 골라 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수를 구하여라.

3 탐구예제



오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정사각형 모양으로 이루어진 도로망에서 P 는 A 에서 출발하여 B 까지 최단거리로 이동하고 Q 는 B 에서 출발하여 A 까지 최단거리로 이동한다. P 와 Q 의 속력이 서로 같고 동시에 출발할 때, 서로 만나는 경우의 수를 구하여라.



풀이 답: 15

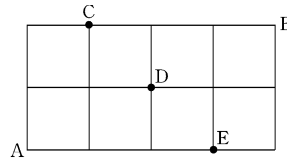
P 와 Q 의 속력이 서로 같으므로 다음 그림과 같이 세 점 C, D, E 에서 만날 수 있다.

(i) C 에서 만나는 경우의 수는 : $\frac{3!}{2!} \times 1 = 3$

(ii) D 에서 만나는 경우의 수는 : $\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 9$

(iii) E 에서 만나는 경우의 수는 : $1 \times \frac{3!}{2!} = 3$

따라서 구하는 경우의 수는 $3 + 9 + 3 = 15$ 이다.

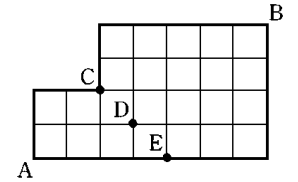


유제 3

다음 물음에 답하여라.

(1) a, b, c, d, e, f 의 여섯 문자로 만든 순열 중에서 모음의 순서가 알파벳의 순서와 같은 것의 개수를 구하여라.

(2) 그림과 같은 도로망에서 A 에서 B 까지 가는 가장 가까운 길의 수를 구하여라.



4 탐구예제



기호 ‘.’ 과 ‘-’ 를 배열하여 전신부호를 만들려고 한다. 100 가지의 부호를 만들려면 이 기호를 최소한 몇 개까지 써야 되는지 구하여라.

풀이 답: 최소 6 개

‘.’ 과 ‘-’ 에서 n 개를 뽑아 전신 부호를 만드는 방법의 수는

2 개에서 n 개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_n = 2^n$$

${}_2\Pi_1 + {}_2\Pi_2 + {}_2\Pi_3 + \cdots + {}_2\Pi_n \geq 100$ 에서

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n \geq 100$$

$$\frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} \geq 100, 2^n \geq 51$$

$$\therefore n \geq 6$$

유제 4

1, 2, 3, 4, 5 가운데서 1 과 2 만을 반복 사용할 수 있다면, 이들 숫자를 써서 만들 수 있는 5 자리의 수는 몇 개 있는지 구하여라.

5 탐구예제



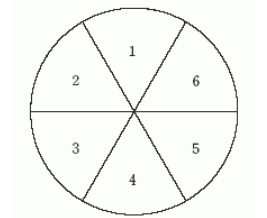
어느 파티에서 남자들은 그의 배우자를 제외한 모든 사람과 악수를 하였고, 여자들끼리는 악수를 하지 않았다고 한다. 13 쌍의 부부가 파티에 참석하였을 때, 참석한 26 명이 나눈 악수의 총 횟수를 구하여라.

풀이 답: 234 회

26 명이 모두 악수를 하였다면 ${}_{26}C_2 = 325$ 이고 이중 13 명의 여자끼리는 악수를 하지 않았으므로 ${}_{13}C_2 = 78$ 는 제외되어야 한다. 마찬가지로 배우자와는 악수를 하지 않았으므로 13 회도 제외되어야 한다. 따라서 악수의 총 회수는 $325 - 78 - 13 = 234$ 이다.

유제 5

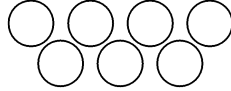
오른쪽 그림과 같은 원판을 붉은색 물감과 파란색 물감으로 칠하려고 한다. 반드시 1 이 적힌 부분부터 칠을 시작하여 시계반대 방향으로 (그림의 번호순으로) 칠하기로 한다. 도중에 숫자가 적힌 부분의 경계면에서 물감의 색깔을 바꿀 수 있고, 그 횟수를 2 회 이내로 제한하려고 할 때, 칠할 수 있는 방법의 수를 구하여라.



6 탐구예제

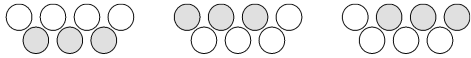


남자 4명과 여자 3명이 아래 그림과 같이 앞줄에 3명 뒷 줄에 4명이 서서 사진을 찍으려고 한다. 이 때, 여자 3명이 앞 줄 또는 뒷줄에서 옆으로 나란히 이웃하도록 서는 방법의 수를 구하여라.



풀이 답: 432 가지

여자 3명이 이웃하도록 이웃한 세 자리를 정하는 방법은



위와 같이 3 가지이다.

이 때 위의 그림의 어두운 자리에 3 명의 여자가 서는 방법의 수는 각각 3! (가지)이다

따라서 여자가 서는 방법의 수는 $3 \times 3!$ (가지)이다

이 때, 남은 4 자리에 남자가 서는 방법의 수는 4! 이다

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 3! \times 4! = 432$ (가지)이다

유제 6

검은 공 6 개, 흰 공 2 개, 빨간 공 1 개가 있다. 다음을 구하여라.

(단, 같은 색의 공은 구별 되지 않는다.)

(1) 9 개의 공을 일렬로 배열하는 경우의 수

(2) 9 개의 공 모두를 원형으로 배열하는 경우의 수

(3) 9 개의 공으로 만든 목걸이(염주순열)의 수

7 탐구예제



7 개의 과일을 3 개의 접시에 담는 경우, 다음을 구하여라. (단, 빈 접시가 있어도 좋다.)

- (1) 과일과 접시를 모두 구분할 때, 담는 방법의 수
- (2) 과일은 구별하지 않고, 접시만 구별할 때의 방법의 수
- (3) 과일과 접시를 모두 구별하지 않을 때의 방법의 수

풀이 답: (1) 2187 가지 (2) 36 가지 (3) 8 가지

(1) 각 과일마다, 담을 수 있는 접시가 3 가지씩이므로 접시 이름 3 개에서 7 개를 뽑는 중복순열이다.

$$\therefore {}_3\Pi_7 = 3^7 = 2187 \text{ (가지)}$$

(2) 접시 이름 3 개에서 7 개를 뽑되 과일이 같으므로 뽑히는 접시 이름의 순서가 필요 없다.

$$\therefore {}_3H_7 = 36 \text{ (가지)}$$

(3) 정수 7 을 3 개의 음이 아닌 정수의 합으로 표시할 수 있는 방법과 같다.

즉, $(0, 0, 7), (0, 1, 6), (0, 2, 5), (0, 3, 4), (1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (2, 2, 3)$

$$\therefore 8 \text{ (가지)}$$

유제 7

5 개의 ‘+’ 부호와 8 개의 ‘-’ 부호를 일렬로 배열하여 부호의 변화가 5 회가 되도록 하는 것은 몇 가지인가?

8 탐구예제



어느 건물에서는 출입을 통제하기 위하여 각 자리가 ‘0’ 과 ‘1’ 로 이루어진 8 자리 문자열의 보안카드를 이용하고 있다. 보안카드의 8 자리 문자열에 ‘1’ 의 개수가 5 개이거나 문자열의 처음 4 자리가 ‘0110’ 이면 이 건물의 출입문을 통과할 수 있다. 예를 들어, 보안카드의 문자열이 ‘10110011’ 이거나 ‘01100101’ 이면 이 건물에 출입할 수 있다. 이 건물의 출입문을 통과할 수 있는 서로 다른 보안카드의 총 개수를 구하여라.

풀이 답: 68 가지

(i) ‘1’ 의 개수가 5 개인 경우 : 이는 8 자리 중 5 자리를 선택하는 경우의 수와 같다.

$$\text{즉, } {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \text{ (개)}$$

(ii) ‘0110’ 을 처음 네 자리로 하는 경우 : 이는 0110□□□□ 와 같은 꼴이다. 뒤에 네 자리에는 각각 0, 1 두 가지가 가능하므로 $2^4 = 16$ (개)

(iii) ‘0110’ 을 처음 네 자리로 하면서 ‘1’ 의 개수가 5 개인 경우

$$\text{즉, } 0110\square\square\square\square \text{의 꼴에서 뒤에 네 자리에 '1' 이 세 개인 경우 : } {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4 \text{ (개)}$$

$$\therefore (i) + (ii) - (iii) = 56 + 16 - 4 = 68$$

유제 8

네 개의 1 과 여섯 개의 2 를 모두 사용하여 만든 10 자리 수 중에서 다음 두 조건을 모두 만족시키는 수열의 개수를 구하여라.

I. 1 은 연속해서 나올 수 없다.

II. 첫째 자리 숫자가 1 이면 마지막 자리 숫자는 2 이다.

9 탐구예제



색깔이 모두 다른 8 개의 공을 똑같은 상자 3 개에 나누어 넣을 때, 각 상자 속에 들어 있는 공이 적어도 2 개 이상이 되도록 나누는 방법의 수를 구하여라.

풀이 답: 490 가지

각 상자에 들어 있는 공이 2 개 이상이 되도록 나누는 방법은 (2, 2, 4) 또는 (2, 3, 3) 이다.

(i) (2, 2, 4) 로 나누는 방법의 수는 : ${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 210$

(ii) (2, 3, 3) 로 나누는 방법의 수는 : ${}_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 280$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $210 + 280 = 490$ 이다.

유제 9

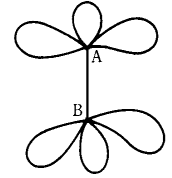
아시아 4 개국과 아프리카 4 개국이 있다. 8 개국을 2 개국씩 짝지어 4 개의 그룹으로 나누려고 한다. 적어도 한 개의 그룹이 아시아 국가만으로 이루어지도록 4 개의 그룹으로 나누는 경우의 수를 구하여라.

종합문제>>>

1. 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 배열할 때 i 번째 숫자를 a_i ($1 \leq i \leq 5$)라고 하면
 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4)(a_5 - 5) \neq 0$ 인 경우의 수는 몇 가지인지 구하여라.

2. 5명씩 두 팀이 참가한 마라톤 경주가 있다. n 등에 n 점을 주기로 하고 점수의 합이 낮은 팀이 이긴다고 한다. 동순위는 없다고 할 때, 경주에서 이길 수 있는 승점의 종류를 구하여라.

3. 오른쪽 그림과 같이 도형을 그리는데 연필을 떼지 않고 한 번에 그리는 방법의 수를 구하여라. (A 또는 B 에서 시작한다.)



4. 볼링 경기에서 최종으로 성적이 우수한 5명의 선수가 결승전을 한다. 처음에 5번 선수와 4번 선수가 경기를 하여 진 사람은 5등, 이긴 사람은 3번 선수와 다시 경기를 한다. 이 경기에서 진 사람은 4등, 이긴 사람은 2번 선수와 다시 겨룬다. 여기서 진 사람은 3등, 이긴 사람은 1번 선수와 다시 겨룬다. 마지막 경기에서 이긴 사람은 1등, 진 사람은 2등이다. 이 때 1번 선수부터 5번 선수까지 몇 가지의 순위가 생길 수 있는가?

5. 다음 물음에 답하여라.

(1) 1, 2, 3 을 사용하여 만들 수 있는 4 자리 정수의 개수와 그들의 총합을 구하여라.

(2) 3 종류의 과일 사과, 배, 감을 4 개의 접시 a, b, c, d 에 빈 접시가 없도록 1 개씩 담는 방법의 수를 구하여라.

(3) 3 개의 과일 사과, 배, 감을 4 개의 접시 a, b, c, d 에 담는 방법의 수를 구하여라.
(단, 빈 접시가 있어도 좋다.)

6. A, H, S, M, E 의 5 개의 문자로 이루어지는 120 개의 순열을 알파벳 순서에 의해 사전식으로 배열을 하였을 때, 86 번째 단어의 마지막 문자를 구하여라.

7. 무지개 색 빨, 주, 노, 초, 파, 남, 보라에 해당하는 7 개의 공이 있다. 다음 물음에 답하여라.

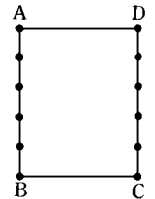
(1) 이들로 만든 원순열의 수

(2) 이들을 끈에 꿰어 만들 수 있는 염주(목걸이)의 가지 수

(3) 이들 중 빨간 공과 파란 공이 이웃하도록 하는 원순열의 수

(4) 이들 중 빨간 공과 파란 공이 이웃하지 않는 염주순열의 수

8. 다음 그림과 같이 직사각형 $ABCD$ 의 변 AB, CD 위에 각각 6 개의 점이 있다. 변 AB 위의 점으로부터 변 CD 위의 점으로 서로 만나지 않는 세 개의 선분을 긋는 방법의 수를 구하여라.



100 문제를 푸는 것 보다
문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

9. 컴퓨터 키보드의 버튼 $\neg$, $\perp$, $\circ$, $\vdash$, $\neg$ 중에서 3 개의 버튼을 눌러서 만들 수 있는 모든 글자의 개수를 구하여라. (단, 각 버튼은 한 번씩만 누른다.)

10. 1, 2, 2, 4, 5, 5 를 일렬로 배열하여 여섯자리 자연수를 만들 때, 300000 보다 큰 자연수의 개수를 구하여라.

100 문제를 푸는 것 보다
문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

11. 지윤이가 놀이터에서 7 개의 계단으로 된 구름다리를 오를 때, 1 계단씩 또는 2 계단씩 오를 때, 이 층계를 오르는 경우의 수를 구하여라.