

100 문제를 푸는 것보다 **원리**를 가르칩니다!

중 · 고등 **고난도** 수학적 사고 시스템 및 이론 확립

(KMO · 과학고 · 영재고 · 자사고 대비서)

도전 원리탐구

Challenge
the Discovery of
Dharma Series **B**
(기하 · 신이론)

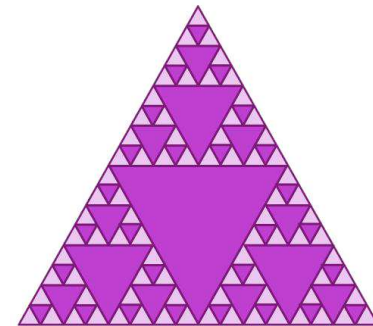
저자 최경호 지음



홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이

원리탐구

제 1강 삼각형과 오심



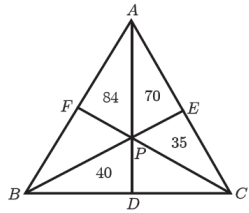
탐구문제 >>

1 탐구문제



그림과 같이 점 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 한 점이고 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ 의 연장선이 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 와 각각 D , E , F 에서 만난다.

$\triangle PAF=84$, $\triangle PAE=70$, $\triangle PEC=35$, $\triangle PBD=40$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.



풀이 답: 315

$\triangle PFB = x$, $\triangle PDC = y$ 라고 하면 다음식이 성립한다.

(i) $\triangle APF : \triangle APC = \overline{FP} : \overline{PC} = \triangle BPF : \triangle BPC$ 이므로

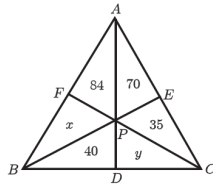
$$84 : 105 = 4 : 5 = x : y + 40 \Rightarrow 5x = 4y + 160, 5x - 4y = 160 \dots ①$$

(ii) $\triangle BEA : \triangle BEC = \overline{AE} : \overline{EC} = \triangle PEA : \triangle PEC$ 이므로

$$x + 84 + 70 : 40 + y + 35 = 2 : 1 \Rightarrow 2y + 150 = x + 154, x - 2y = -4 \dots ②$$

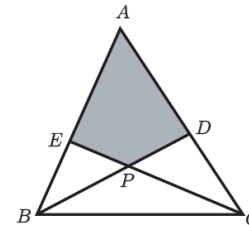
①, ②를 연립하여 풀면 $x = 56$, $y = 30$ 이다.

$\therefore \triangle ABC = 84 + 56 + 40 + 30 + 35 + 70 = 315$ 이다.



유제 1

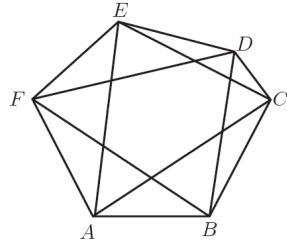
그림에서 $\triangle EBP$ 의 넓이가 1, $\triangle PCD$ 의 넓이가 2, $\triangle BPC$ 의 넓이가 3이라고 할 때, $\square AEPD$ 의 넓이를 구하여라.



2 탐구예제



불록 육각형 $ABCDEF$ 에서 $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$, $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$, $\overline{EF} \parallel \overline{AD}$ 이다. $\triangle ACE$ 와 $\triangle BDF$ 의 넓이가 같음을 증명하여라.



풀이 답: 풀이참조

(삼각형의 넓이) = $\frac{1}{2} \times (\text{밑변}) \times (\text{높이})$ 이므로 밑변의 길이와 높이의 길이가 같으면 넓이가 같다.

(육각형 $ABCDEF$ 의 넓이) - $\triangle ACE$ = (육각형 $ABCDEF$ 의 넓이) - $\triangle BDF$ 임을 보이면 된다.

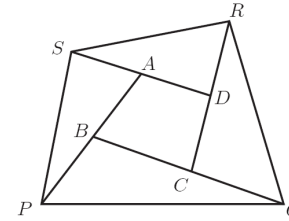
$\overline{AB} \parallel \overline{CF}$ 이므로 $\triangle ABC = \triangle ABF$, $\overline{DC} \parallel \overline{EB}$ 이므로 $\triangle DCE = \triangle DCB$,

$\overline{EF} \parallel \overline{AD}$ 이므로 $\triangle EFA = \triangle EFD$ 이다.

$$\begin{aligned} & (\text{육각형 } ABCDEF \text{의 넓이}) - \triangle ACE \\ &= \triangle ABC + \triangle DCE + \triangle EFA \\ &= \triangle ABF + \triangle DCB + \triangle EFD \\ &= (\text{육각형 } ABCDEF \text{의 넓이}) - \triangle BDF \end{aligned}$$

유제 2

그림과 같이 $\square ABCD$ 의 각 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 의 연장선 위에 $\overline{AP} = 2\overline{AB}$, $\overline{BQ} = 2\overline{BC}$, $\overline{CR} = 2\overline{CD}$, $\overline{DS} = 2\overline{DA}$ 가 되는 점 P, Q, R, S 를 취하여 $\square PQRS$ 를 만들었다. 이 때, $\square PQRS$ 의 넓이는 $\square ABCD$ 의 넓이의 몇 배인지 구하여라.



3 탐구예제



$\triangle ABC$ 의 내부의 한 점 O 가 있어서 $\overline{AO}$ 의 연장선과 $\overline{BC}$ 와의 교점을 D , $\overline{BO}$ 의 연장선과 $\overline{AC}$ 와의 교점을 E , $\overline{CO}$ 의 연장선과 $\overline{AB}$ 와의 교점을 F 라 할 때, 다음임을 증명하라.(체바의 정리)

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

풀이 답: 풀이참조

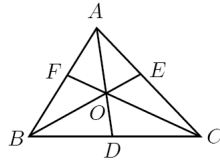
(해1) 같은 높이의 두 삼각형 면적의 비는 대응 밑변의 비 및 가비의 리를 이용하여 증명한다.

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\triangle CAF}{\triangle CFB} = \frac{\triangle AOF}{\triangle BOF} = \frac{\triangle CAF - \triangle AOF}{\triangle CFB - \triangle BOF} = \frac{\triangle OAC}{\triangle OBC}$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\triangle CBE}{\triangle ABE} = \frac{\triangle COE}{\triangle AOE} = \frac{\triangle CBE - \triangle COE}{\triangle ABE - \triangle AOE} = \frac{\triangle OBC}{\triangle OAB}$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\triangle BAD}{\triangle CAD} = \frac{\triangle BOD}{\triangle COD} = \frac{\triangle BAD - \triangle BOD}{\triangle CAD - \triangle COD} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OAC}$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\triangle OAC}{\triangle OBC} \cdot \frac{\triangle OAB}{\triangle OAC} \cdot \frac{\triangle OBC}{\triangle OAB} = 1 \text{ 이다.}$$



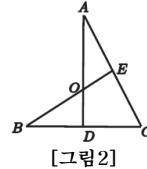
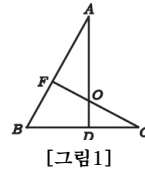
(해2) 메네라우스의 정리의 이용

[그림1], [그림2]를 이용하면 다음과 같다.

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{DO}}{\overline{OA}} = 1 \dots \textcircled{1}$$

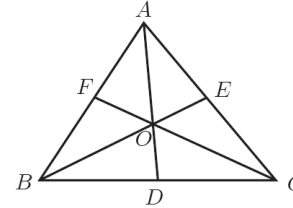
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{DO}}{\overline{OA}} = 1 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1 \text{ 이다.}$$



유제 3

그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내부의 한 점 O 에서 만나는 세직선 AO, BO, CO 가 대변과 각각 D, E, F 에서 교차하면, $\frac{\overline{AO}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}$ 임을 증명하여라.



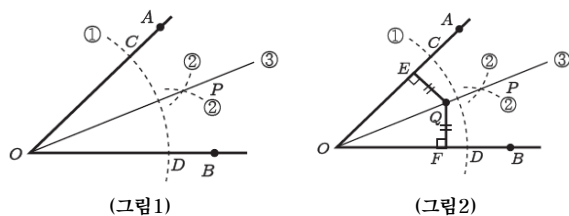
1. 작도의 특징

1. 눈금이 없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 도형을 그리는 것을 작도라 하며, 도형의 응용에는 각의 이등분선의 작도(그림1)과 선분의 수직이등분선의 작도(그림3)이 많이 활용된다. 작도의 순서는 그림의 번호와 같다. 작도하는 방법보다도 그 특성을 잘 파악하여 실전에 적용하기 바란다.

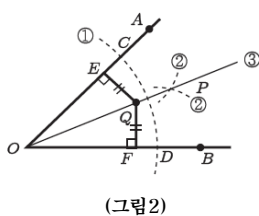
2. 각의 이등분선과 선분의 수직이등분선의 특성

① **각의 이등분선의 특성:** 각의 이등분선 위의 한 점에서 각의 두 변에 이르는 거리는 같다. 즉, 두 변(반직선, 직선)에서 이르는 거리가 같은 점들의 집합이 각의 이등분선이다. (이유) (그림2)의 각의 이등분선 $\overrightarrow{OP}$ 위의 임의의 점 Q 에서 각의 두 선 $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ 에 수선을 내려 그 점을 E, F 라고 하면 $\triangle QEO \equiv \triangle QFO$ (RHA 또는 ASA합동)이므로 $\overline{QE} = \overline{QF}$ 이다.

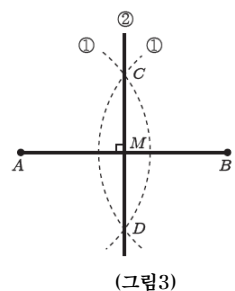
② **선분의 수직이등분선의 특성:** 선분의 수직이등분선 위의 점에서 선분의 양 끝점까지의 거리는 같다. 즉, 두 점에서 같은 거리에 있는 점들의 집합이 선분의 수직이등분선이다. (이유) (그림4)의 선분의 수직이등분선 $\overline{MC}$ 위의 임의의 점 P 에서 선분의 양 끝점 A, B 에 선을 이으면 $\triangle PAM \equiv \triangle PBM$ (SAS합동)이므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이다.



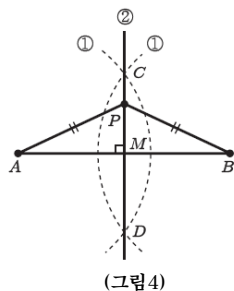
(그림1)



(그림2)



(그림3)



(그림4)

2. “5심”의 정의와 성질

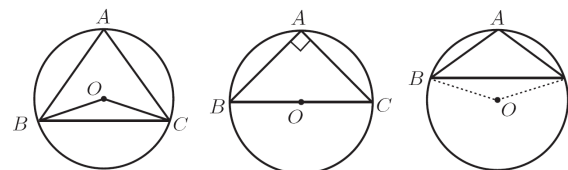
삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만나며, 세 내각의 이등분선도 한 점(내심)에서 만나고, 세 중선도 한 점(무게중심)에서 만나며, 세 높이도 한 점(수심)에서 만나고, 삼각형 한 내각을 이등분하는 선과 다른 두 내각의 외각 이등분선이 한 점(방심)만난다. 이 다섯 가지 교점을 삼각형의 “5심”이라고 한다.

1. 외심

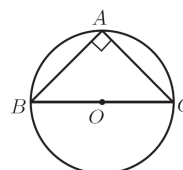
삼각형 세 변의 수직이등분선의 교점을 삼각형의 외심이라고 한다. 이는 삼각형의 외접원의 중심이다.

외심의 성질:

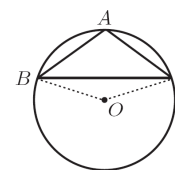
- (1) 삼각형의 외심은 세 꼭지점에서 외심까지의 거리가 같으며 모두 삼각형의 외접원의 반지름과 같다.
 - (2) 삼각형의 외심의 위치는 삼각형 안이나 밖 또는 한 변 위에 있다.
 - (3) $\triangle ABC$ 에서 O 가 외심이고 $\angle A$ 가 예각 또는 직각이면 $\angle BOC = 2\angle A$, $\angle A$ 가 둔각이면 $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle A$ 이다.
- 따라서 [그림2]와 같이 삼각형의 외심의 위치가 한 변 위에 있으면 중심각이 180° 이므로 원주각은 90° 이다.



[그림1]



[그림2]



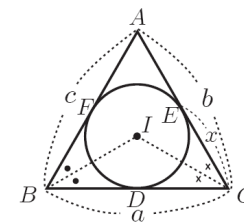
[그림3]

2. 내심

삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점을 삼각형의 내심이라고 한다. 그는 삼각형의 내접원의 중심이다.

내심의 성질:

- (1) 삼각형의 내심은 세 변에서의 거리가 같다.
- (2) 삼각형의 내심과 꼭지점의 연장선은 이 각을 이등분한다.
- (3) $\angle BIC = 180^\circ - \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2}A$
- (4) $x = \frac{a+b-c}{2}$

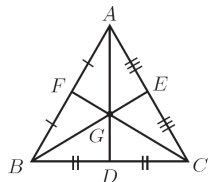


3. 무게중심

삼각형 세 변의 중선의 교점을 삼각형의 무게중심이라고 한다.

무게중심의 성질:

- (1) 삼각형의 무게중심은 중선 길이를 1:2로 나눈다. 즉 무게중심에서 변의 중점까지의 거리는 무게중심에서 이 변에 대응하는 꼭지점까지의 거리의 반이고 중선 길이의 삼분의 일이다.
- (2) 삼각형의 무게중심과 세 꼭지점까지의 연장선은 본래 삼각형을 면적이 같은 세 삼각형으로 나누게 한다.
- (3) 삼각형의 무게중심 또한 그 “중점 삼각형”(세 중점으로 구성된 삼각형)의 무게중심이다.

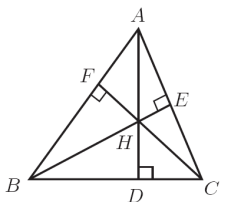


4. 수심

삼각형 세 높이의 교점을 삼각형의 수심이라고 한다.

수심의 성질:

- (1) 삼각형의 수심에서 어느 꼭지점까지 거리는 외심에서 이 꼭지점의 대변까지 거리의 두 배와 같다.
- (2) 삼각형의 수심과 세 꼭지점을 포함하여 이 네 점 중의 임의의 한 점은 다른 세 점으로 구성된 삼각형의 수심이 된다.(그림을 그려서 이 성질을 이해하기 바람.)
- (3) 삼각형의 수심과 임의의 꼭지점의 연장선은 이 꼭지점의 대변과 수직이다.

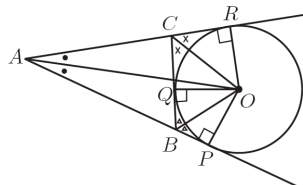


5. 방심

삼각형 한 내각을 이등분하는 선과 다른 두 내각의 외각 이등분선이 한 점에서 만날 때, 이 점을 삼각형의 방심(삼각형의 옆에서 접하는 원의 중심)이라고 하고, 하나의 삼각형에 3개의 방심이 있다.

방심의 성질:

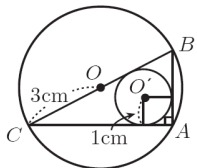
- (1) 방심은 삼각형의 세 변(또는 그 연장선)에서 같은 거리에 있다.
- (2) $\triangle ABC$ 의 둘레는 $\overline{AR} + \overline{AP}$ 의 길이와 같다.
또는 $\overline{AR} = \overline{AP}$ 의 2배와 같다.



4 탐구예제



그림에서 두 원 O, O' 의 반지름의 길이가 각각 $3\text{cm}, 1\text{cm}$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.



풀이 답: 7

원 O' 과 $\triangle ABC$ 의 세 변 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 와의 접점을 각각 D, E, F 라 하고 $\overline{AB} = a\text{cm}, \overline{AC} = b\text{cm}$ 라고 하자.

$\square O'FAD$ 는 정사각형이므로 $\overline{AD} = \overline{AF} = 1\text{cm}$

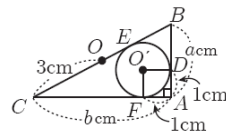
$\overline{BD} = \overline{BE} = (a-1)\text{cm}, \overline{CF} = \overline{CE} = (b-1)\text{cm}$

$\overline{BC} = 6\text{cm}$ 이므로 $(a-1) + (b-1) = 6 \quad \therefore a+b=8$

$\therefore \triangle ABC = \triangle O'AB + \triangle O'CA + \triangle O'BC$

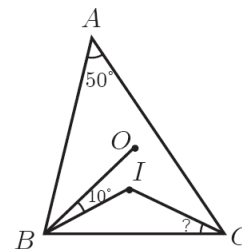
$$= \frac{1}{2} \times a \times 1 + \frac{1}{2} \times b \times 1 + \frac{1}{2} \times 6 \times 1 = \frac{1}{2}(a+b) + 3$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 + 3 = 7(\text{cm}^2)$$



유제 4

그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A = 50^\circ$ 이고, 점 O 와 점 I 는 각각 $\triangle ABC$ 의 외심과 내심이 다. $\angle OBI = 10^\circ$ 일 때, $\angle ICB$ 의 크기는 몇 도($^\circ$)인가?



5 탐구예제



원래의 삼각형의 면적이 80일 때, 이 삼각형의 세 중선이 변이 되어 만들어지는 삼각형의 면적을 구하여라.

풀이 답: 60

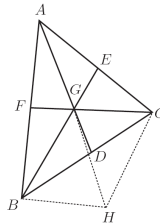
그림과 같이 $\triangle ABC$ 세 중선 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ 가 G 에서 서로 만난다고 하면 H 까지 $\overline{AD}$ 를 연장하여 $\overline{DH} = \overline{DG}$ 이게 하면 $BHCG$ 는 평행사변형이 된다.(대각선이 서로 다른 것을 이등분하므로) 무게중심 성질에서 알 수 있듯이

$$\overline{GH} = 2\overline{DG} = \frac{2\overline{AD}}{3}, \quad \overline{CG} = \frac{2\overline{CF}}{3}, \quad \overline{CH} = \overline{BG} = \frac{2\overline{BE}}{3} \text{ 이다. 세 중심선이}$$

변이 되는 삼각형의 면적을 S 라고 할 때, 각 중선의 길이의 $\frac{2}{3}$ 로 만들어진

삼각형 면적 $S_{\triangle CGH} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S = \frac{4}{9}S$ 이고, $S_{\triangle CGH} = S_{\triangle BGC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ 이므로

$$S = \frac{9}{4}S_{\triangle CGH} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC} \text{ 이다. } \therefore 80 \times \frac{3}{4} = 60$$



유제 5

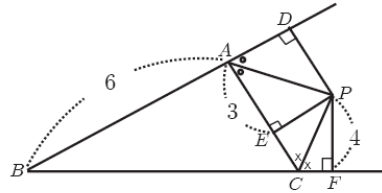
G 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심, $\angle A = 90^\circ$ 이고, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 의 중점을 각각 D , E , F 이고 $\overline{GB} = 10$, $\overline{FG} = 4$ 일 때, $\overline{AG}$ 의 길이를 구하여라.

6 탐구예제

원리탐구

그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 와 $\angle C$ 의 외각의 이등분선의 교점을 P 라 하고, 점 P 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 의 연장선 위에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F 라고 한다.

$\overline{AB}=6$, $\overline{AE}=3$ 이고, $\overline{PF}=4$ 일 때, $\square PDBF$ 의 넓이를 구하여라.



풀이 답: 36

$\triangle PDA \equiv \triangle PEA$ (RHA 합동)이므로 $\overline{AD} = \overline{AE} = 3$,

$\triangle PEC \equiv \triangle PFC$ (RHA 합동)이므로 $\overline{PE} = \overline{PF} = 4$, $\overline{PE} = \overline{PD}$ 이므로 $\overline{PD} = 4$ 이다.

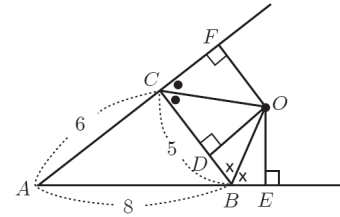
또, $\triangle PDB \equiv \triangle PFB$ (RHS 합동)이므로 $\square PDBF$ 의 넓이는 다음과 같다.

$$\therefore \square PDBF = 2\triangle PDB = 2 \times \frac{1}{2} \times 9 \times 4 = 36$$

Challenge
The discovery of dharma series B(기하·신이론)

유제 6

그림 $\triangle ABC$ 에서 $\angle B, \angle C$ 의 이등분선의 교점을 O 라 하고, $\overline{BC}$ 와 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 D, E, F 라고 한다. $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=5$ 일 때, $\overline{AF}, \overline{DB}$ 의 길이를 구하여라.



7 탐구예제



□ABCD가 한 원에 외접할 때, 다음을 증명하여라.

(1) $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$

(2) 역으로 □ABCD에서 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$ 이면, 이 사각형은 한 원에 외접함을 증명하여라.

풀이 답: 풀이참조

(1) 사각형 ABCD가 원에 외접할 때 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$ 임을

증명하자. 원과 네 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 의 접점을

각각 X, Y, Z, W라고 하면

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AX} + \overline{XB} + \overline{CZ} + \overline{ZD} = \overline{AW} + \overline{BY} + \overline{YC} + \overline{DW} = \overline{BC} + \overline{DA}$$

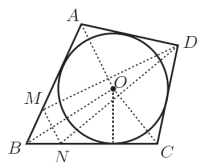
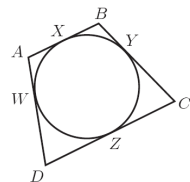
(2) $\overline{AB} > \overline{AD}$ 이라면, 알고 있는 조건으로부터

$$\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{BC} - \overline{CD} > 0 \dots \textcircled{1}$$

$\overline{AB}$ 상에서 $\overline{AM} = \overline{AD}$, $\overline{BC}$ 상에서 $\overline{NC} = \overline{CD}$, $\overline{MN}$ 을 연결하면 $\overline{BM} = \overline{BN}$ 이다.

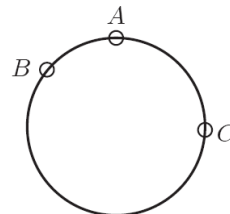
따라서 △AMD, △CDN, △BMN 모두 이등변 삼각형이다. ∠A, ∠B, ∠C의 이등분선은 반드시

$\overline{MD}$, $\overline{MN}$, $\overline{ND}$ 의 수직이등분선이 되고 △DMN 세 변의 수직이등분선은 반드시 한 점 O (즉 △DMN의 외심)에서 만난다. 각의 이등분선은 변에 이르는 거리가 같은 점들이므로 O에서 $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 네 변에 이르는 거리가 서로 같으므로 O는 원의 중심이고 r이 반지름인 원이 바로 ABCD의 내접원이다.



유제 7

그림과 같이 원형산책로로 둘러싸인 올림픽공원에 산책로를 따라 매점 A, B, C를 설치했다. 공원 안에서 가장 가까운 매점에 가려고 한다. 매점 A에서 가장 가까이 있는 산책로의 길이가 100m 라면, 매점 A에서 가장 가까운 산책로 안쪽의 영역의 넓이는 몇 (m^2) 일까? (단, 원형산책로의 반지름의 길이는 100m 이다.)



8 탐구예제



다음을 구하여라.

- (1) 정 n 각형의 한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 수
- (2) 정 n 각형의 대각선의 총수
- (3) 정 29각형에서 길이가 서로 다른 대각선의 수
- (4) 정 30각형에서 길이가 서로 다른 대각선의 수
- (5) 정 n 각형에서 길이가 서로 다른 대각선의 수

풀이 답: (1) $n-3$ (2) $\frac{n(n-3)}{2}$ (3) 13 (4) 14 (5) (i) 홀수: $\frac{n-3}{2}$ (ii) 짝수: $\frac{n-2}{2}$

(1) 특정한 한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선은 그 점과 양쪽의 점을 제외한 $n-3$ (개)이다.

(2) (해1) 한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 개수, $n-3$ (개)가 n (개)의 꼭지점에서 모두 발생하므로 $n(n-3)$ (개)에서 한 대각선이 두 번 세어 졌으므로 2로 나누어 $\frac{n(n-3)}{2}$ 이다.

(해2) n 개의 점에서 2 개를 선택한 다음, 변의 수를 뺀 $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ 이다.

(3) 한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선을 그을 때, 그 한 점과 이웃하는 점에서는 대각선이 만들어지지 않으므로 한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선 $29-3$ 개이고 양쪽에 같은 길이의 대각선이 있으므로 $\frac{29-3}{2} = 13$ (개)이다.

(4) (3)번과 같이 그 한 점과 이웃하는 점에서는 대각선이 만들어지지 않지만, 가장 긴 대각선은 중복되지 않으므로 $\frac{30-3-1}{2} + 1 = 14$ (개)이다.

(5) (3)과 (4)에서처럼 홀수와 짝수의 경우가 다르므로 나눈다.

(i) 홀수의 경우, $\frac{n-3}{2}$ (ii) 짝수의 경우, $\frac{n-3-1}{2} + 1 = \frac{n-2}{2}$

유제 8

한 내각의 크기와 한 외각의 크기의 비가 9:1인 정다각형의 대각선은 모두 몇 개인가?

9 탐구예제



P 는 26개의 꼭지점과 36개의 면으로 이루어진 볼록다면체일 때, 24개의 면은 삼각형이고 12개의 면은 사각형이라고 하면 P 가 가지는 한 면에 있지 않은 두 꼭지점을 연결한 대각선은 몇 개인가?

풀이 답: 241

한 면에 있지 않은 대각선이란 다면체의 내부를 통과하는 대각선을 말한다. 꼭지점에서 3 또는 4개의 면이 만난다. 그러나 구체적인 모양을 만들 수 없는 경우에 모든 가능한 대각선에서 내부를 통과하지 않는 대각선 또는 모서리를 제외하면 된다.

이것은 다음과 같은 일반적인 방법으로 구할 수 있다.

모서리는 변이 2개 모여 생긴다. 따라서 모두 잘랐을 때 변의 개수를 2로 나눈 것이 모서리의 개

수이므로 $\frac{24 \times 3 + 12 \times 4}{2} = 60$ 개이다.

(내부에 생기는 대각선의 개수)

= (전체 꼭지점에서 2개를 뽑는 방법) - (면에 생기는 대각선의 총 개수) - (모서리의 총 개수)이다.

따라서 (대각선의 총 개수) = (26개의 꼭지점에서 2개 뽑는 방법) - (사각형의 면에서의 총 대각선 개

수) - (전체 모서리) = $\frac{26 \times 25}{2} - 2 \times 12 - 60 = 325 - 24 - 60 = 241$ (개)이다.

유제 9

육면체의 끄트머리들을 자르고 또 잘라내서 어떤 볼록다면체를 만들었다. 이 입체는 26면체로서 그 면들은 12개의 정사각형과 8개의 정육각형 그리고 6개의 정팔각형으로 구성되어 있다. 그리고 임의의 각 꼭지점에서 교차하는 3개의 면들은 항상 1개의 정사각형, 1개의 정육각형, 1개의 정팔각형이다. 이제 그들 꼭지점들을 2개씩 연결해서 선분을 만들 때, 이 입체의 내부에서만 만들어지는 선분은 모두 몇 개인가?

10 탐구예제



정육각형 모양의 같은 크기의 타일이 빈틈없이 깔려 있는 어떤 목욕탕의 바닥에서, 가장 자리로부터 여러 개의 타일을 뜯어내었다. 남아 있는 타일들이 이루는 도형을 살펴 보았더니, 바깥 변의 개수가 30 개였다. 두 개의 타일이 만나는 꼭지점은 14 개이고, 세 개의 타일이 만나는 꼭지점은 8 개라고 한다. 이 때, 남아 있는 타일의 개수를 구하여라.(단, 붙어 있는 타일들은 변을 공유하면서 붙어 있다고 가정한다.)

풀이 답: 11

남은 정육각형의 면 개수: x 개, 모서리 개수는 $e = \frac{6x-30}{2} + 30$, 꼭지점 개수 $v = 30 + 8 = 38$

($\because$ 꼭지점 개수는 ① (바깥 모서리 개수)=(바깥 꼭지점의 개수)=30, ② 3면이 만나서 생기는 꼭지점 8개, ①+②이다.)

그리고 $v - e + f = 1$ 이므로 $38 - \left(\frac{6x-30}{2} + 30\right) + x = 1$, $38 - 3x - 15 + x = 1 \therefore x = 11$

유제 10

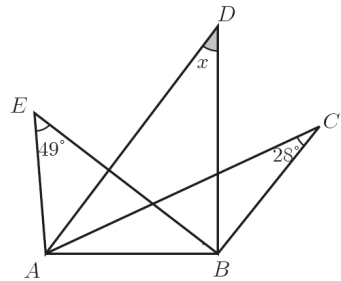
어떤 볼록 다면체의 각 면이 삼각형, 사각형, 오각형 또는 육각형이라 하자. 이 다면체에 삼각형 면이 두 개, 사각형 면이 한 개 있을 때, 다음 중 옳은 것은 어느 것인가?

- ① 오각형 면은 세 개, 육각형 면은 두 개 있을 수 있다.
- ② 오각형 면은 두 개, 육각형 면은 세 개 있을 수 있다.
- ③ 오각형 면은 네 개,육각형 면은 한 개 있을 수 있다.
- ④ 오각형 면은 두 개, 육각형 면은 두 개 있을 수 있다.
- ⑤ 오각형 면은 한 개, 육각형 면은 네 개 있을 수 있다.

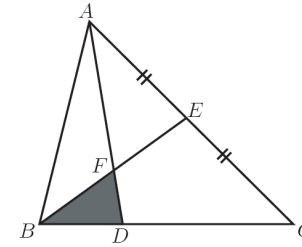
종합문제 >>>

1. $\triangle ABC$ 는 넓이 1인 직각삼각형이다. A, B, C 를 각각 대변에 대해 대칭이동한 점을 A', B', C' 이라 하자. $\triangle A'B'C'$ 의 넓이를 구하여라.

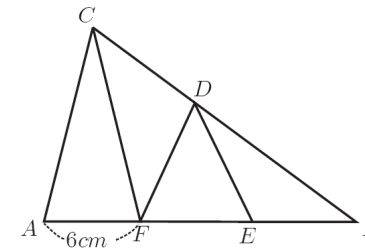
2. 그림에서 $\angle EAD = 2\angle DAC$, $\angle EBD = 2\angle DBC$, $\angle E = 49^\circ$, $\angle C = 28^\circ$ 일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



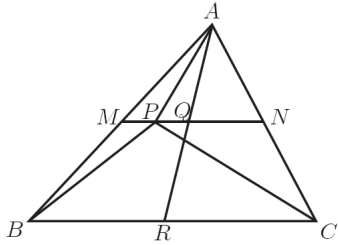
3. 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AC}$ 의 중점을 E , $2\overline{BD} = \overline{DC}$ 인 점을 D , $\overline{AD}$ 와 $\overline{BE}$ 의 교점을 F 라고 할 때, $\triangle BDF$ 와 $\square FDCE$ 의 넓이의 비를 구하여라.



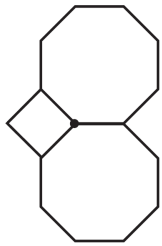
4. 그림과 같은 큰 삼각형을 면적이 같은 4개의 삼각형으로 나눴다. $\overline{AF} = 6\text{cm}$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.



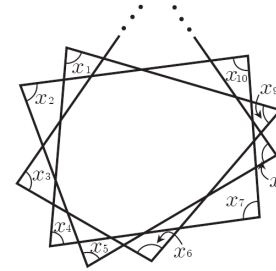
5. 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내부의 한 점 P 에 대하여 $\triangle PAB = a$, $\triangle PBC = b$, $\triangle PCA = c$ 라 하고, 점 P 를 지나 $\overline{BC}$ 에 평행한 직선이 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 와 만나는 점을 각각 M, N 이라 하자. 이 때, 점 A 에서 $\overline{MN}$ 위의 임의의 점 Q 를 잇는 직선이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 R 라 할 때, $\frac{AQ}{QR}$ 를 a, b, c 를 사용하여 나타내어라.



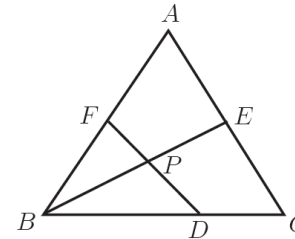
6. 정 l 각형, 정 m 각형, 정 n 각형의 타일로 한 점의 주변을 겹치지 않고 빈틈없이 놓으려한다. 이 때, l, m, n 의 관계식을 구하여라.(그림은 하나의 예이다.)



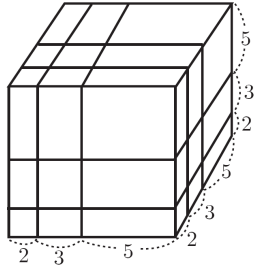
7. 그림과 같이 n 개의 꼭지점을 가진 별 모양의 도형을 만들었다. n 개의 각의 크기의 합을 n 을 이용하여 나타내어라. (단, $n \geq 7$)



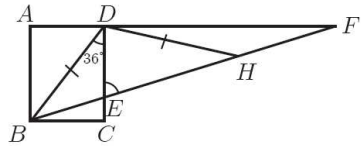
8. 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 $\overline{BC}$ 를 2:1로 내분하는 점을 D , 두 변 $\overline{CA}$ 와 $\overline{AB}$ 의 중점을 각각 E, F 라 하고, $\overline{BE}$ 와 $\overline{DF}$ 의 교점을 P 라 하자. $\triangle FBP$ 의 넓이가 16일 때, $\square AFPE$ 의 넓이를 구하여라.



9. 그림과 같이 길이가 10인 정육면체의 각 모서리에 길이가 2, 3, 5가 되는 점을 잡아서 선분으로 이었다. 정육면체의 면에 그려진 선분을 따라 정육면체를 자를 때 나타나는 27개의 도막 중에서 부피 6의 배수인 것은 몇 개인가?



10. 그림과 같이 직사각형 $ABCD$ 의 점 B 에서 $\overline{CD}$ 위의 한 점 E 를 지나는 직선을 그어 $\overline{AD}$ 의 연장선과 만나는 교점을 F 라 하자. $\overline{EF}$ 의 중점 H 에 대하여 $\overline{BD} = \overline{DH}$, $\angle BDC = 36^\circ$ 일 때, $\angle DEF$ 의 크기를 구하여라.



11. 다음 조건을 만족시키는 사다리꼴 $ABCD$ 에서 다음을 구하여라.

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \overline{AD} \parallel \overline{BC}, \overline{AD} = 4\text{cm}, \overline{BC} = 6\text{cm}, \overline{AC} \perp \overline{BD}$$

(1) 사다리꼴 $ABCD$ 의 높이

(2) 사다리꼴 $ABCD$ 의 넓이

12. 직각삼각형 ABC 안에 원이 내접하고 있다. 각 변의 길이가 a, b, c 이고, $\frac{1}{2}ab = a + b + c$ 가 성립할 때, $\triangle DCE$ 의 둘레의 길이를 구하여라.

