100 문제를 푸는 것보다 문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

수학 계산의 핵심은 (소)인수분해입니다!

계산·식 원리탐구

중ⅢB

Calculation
The discovery of dharma
Series MⅢB

최경호 지음

영재성 계발 · 발휘 프로그램

★ **계산과 법칙의 원리**를 깨우친다.

★ 계산의 유기적 관계를 이해하여 **효율적 계산능력**을 기른다.

★ 쉽고 빠른 계산 원리와 방법으로 **계산의 정확성과 신속성**을 기른다.

★ 복잡해 보이는 문제를 간략한 **수학적 식으로 표현하는 능력**을 기른다.

★ 그림이나 퍼즐 등 다양한 형식을 통하여 **계산의 흥미**를 유발한다.

★ **영재성발휘의 수리적 토대**를 형성한다.

원리탐구

계산·식 원리탐구 중3B 차례

생활 속의 수학

제 4강 이차식 세우기

1. 이차식

이차식이란 식을 정리하여 가장 높은 차수가 2차인 식을 말하며, 많이 나오는 식은 이차방정식과 이차함수이다.

(1) 이차방정식

방정식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때, 다음과 같은 꼴로 나타나는 방정식을 x에 관한 이차방정식이라 한다.

$ax^2+bx+c=0$ (a, b, c **는 상수,** $a\neq 0$)

(2) 이차함수

함수 $y=f(x)$ 에서 y 가 아래와 같이 x 에 관한 이차식으로 나타내어질 때, 이 함수를 x 에 관한 이차함수라 한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (**단,** a, b, c **는 상수,** $a\neq 0$)

1 계산예제

원리탐구

다음 주어진 문자를 사용한 이차방정식을 세워라.

(1) 어떤 자연수를 제곱해야 할 것을 잘못하여 2 배하였더니 제곱한 것보다 48 이 작게 되었다.(어떤 자연수를 x로 한다.)

(2) 어떤 양수와 그 수에서 2를 뺀 것과의 곱이 3이 되었다.(어떤 양수를 x로 한다.)

(3) 어떤 수학책을 펼쳤더니 두 면의 곱이 1806이었다.(작은 쪽 수을 x로 한다.)

(4) 연속하는 세 양의 정수에서 가장 큰 수의 제곱은 작은 두 수의 곱의 2배보다 20이 작다고 한다.(중간 수를 x로 한다.)

풀이 **답: 풀이참조**

(1) 어떤 자연수를 x **라 하면** $2x = x^2 - 48$, $x^2 - 2x - 48 = 0$ **이다.**

(2) 어떤 양수를 x**라 하면** $x(x-2) = 3$, $x^2 - 2x - 3 = 0$ **이다.**

(3) 펼친 두 면의 쪽수 중 작은 쪽수를 x **라 하면, 다음 쪽은** $x+1$**이므로 식은 다음과 같다.**

$x(x+1) = 1806$, $x^2 + x - 1806 = 0$

(4) 중간 수를 x **라 하면, 연속하는 세 양의 정수는** $x-1$, x, $x+1$ **이므로 식은 다음과 같다.**

$(x+1)^2 = 2x(x-1) - 20$, $x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 2x - 20$, $x^2 - 4x - 21 = 0$

유제 1

다음 주어진 문자를 사용한 이차방정식을 세워라.

(1) 어떤 수를 제곱한 것은 그 수를 9배한 것보다 20이 더 작다.(어떤 수를 x로 한다.)

(2) 어떤 양수와 그 수에서 4를 더한 것과의 곱이 12가 되었다.(어떤 양수를 x로 한다.)

(3) 어떤 양수를 제곱해야 할 것을 잘못하여 3배 하였더니, 제곱한 것보다 18이 작아졌다.(어떤 양수를 x로 한다.)

(4) 연속된 두 양의 짝수의 곱이 168이다.(작은 짝수를 x로 한다.)

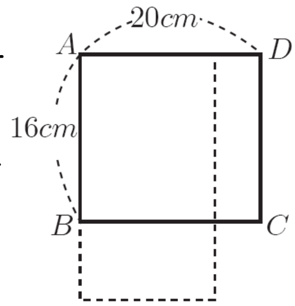
(5) 연속된 세 자연수가 있다. 각각의 제곱의 합이 194가 된다.(중간 수를 x로 한다.)

(6) 연속하는 두 짝수를 제곱하여 더해야 할 것을 잘못하여 더한 후에 제곱 하였더니 원래의 값보다 240만큼 커졌다.(작은 짝수를 x로 한다.)

2 계산예제 원리탐구

다음 주어진 문자를 사용한 이차방정식을 세워라.

(1) 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 $20cm, 16cm$인 직사각형이 있다. 가로의 길이는 매초 $1cm$씩 줄어들고, 세로의 길이는 매초 $2cm$씩 늘어날 때, 몇 초 후에 넓이가 처음과 같아 질 때, 다음을 구하여라.(몇 초 후를 x로 한다.)

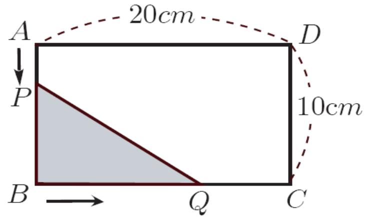


① x초 후의 가로, 세로의 길이　　② 이차방정식

(2) 어떤 원의 반지름의 길이를 $1cm$만큼 줄였더니 넓이는 처음 원의 $\frac{1}{3}$이 되었다. 다음을 구하여라.(처음 원의 반지름의 길이를 x로 한다.)

① 반지름의 길이를 $1cm$만큼 줄였을 때의 원의 넓이　　② 이차방정식

(3) 그림과 같은 직사각형 $ABCD$가 있다. 점 P는 $\overline{AB}$ 위를 점 A에서 점 B까지 초속 $1cm$로 움직이고, 점 Q는 $\overline{BC}$ 위를 점 B에서 점 C까지 초속 $2cm$로 움직인다. 두 점 P, Q가 동시에 출발할 때, 몇 초 후에 $\triangle PBQ$의 넓이가 $16cm^2$가 된다.(몇 초 후를 x로 한다.)



① x초 후의 $\overline{PB}, \overline{BQ}$의 길이　　② 이차방정식

풀이　**답: 풀이 참조**

(1) ① x초 후에 가로의 길이는 매초 $1cm$씩 줄어듦으로 가로길이는 각각 $(20-x)cm$,
세로의 길이는 매초 $2cm$씩 늘어남으로 $(16+2x)cm$이다.
② 처음 넓이와 같아진다고 하면 다음식이 성립한다.
$(20-x)(16+2x)=20\times16$, $320+24x-2x^2=320$, $x^2-12x=0$
(2) ① 처음 원의 반지름의 길이를 x라 하면, 반지름의 길이를 $1cm$만큼 줄였을 때의 원의 반지름은 $x-1$이므로 이때의 원의 넓이 $\pi(x-1)^2$이다.
② 처음 원의 $\frac{1}{3}$이 되었으므로 다음식이 성립한다.
$\frac{1}{3}\pi x^2=\pi(x-1)^2$, $\pi x^2=3\pi(x-1)^2$, $x^2=3x^2-6x+3$, $2x^2-6x+3=0$
(3) 점 P는 $\overline{AB}=10cm$위를 점 A에서 점 B까지 초속 $1cm$로 움직이므로 x초 후에 $\overline{BP}=10-x$, 점 Q는 $\overline{BC}=20cm$ 위를 점 B에서 점 C까지 초속 $2cm$로 움직이므로 $\overline{BQ}=2x$이다.
② x초 후에 $\triangle PBQ$의 넓이가 $16cm^2$되므로 다음식이 성립한다.
$\triangle PBQ=\frac{1}{2}\times(10-x)\times2x=16$, $x^2-10x+16=0$

유제 2

다음 주어진 문자를 사용한 이차방정식을 세워라.

(1) 가로, 세로의 길이가 각각 $10m$, $5m$인 직사각형 모양의 밭이 있다. 가로, 세로의 길이를 똑같이 늘여서 처음 넓이의 3배가 되게 하였다.(늘인 길이를 x라 한다.)

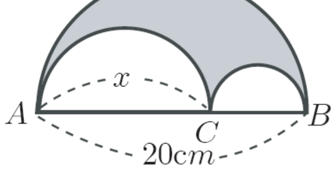
① 늘린 후의 가로, 세로의 길이 **② 이차방정식**

(2) 어떤 정사각형에서 가로의 길이는 $3cm$ 늘이고 세로의 길이는 $1cm$ 줄여서 넓이가 $45cm^2$인 사각형을 만들었다.(처음 정사각형의 한 변의 길이 xcm라 한다.)

① 늘이고 줄인 후의 가로, 세로의 길이 **② 이차방정식**

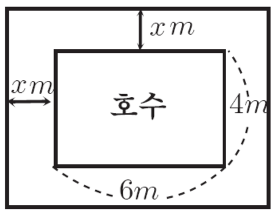
(3) 그림과 같이 세 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$의 길이가 $20cm$일 때 색칠한 부분의 넓이가 $16\pi cm^2$가 되도록 하려한다.($\overline{AC}=x\,cm$라 한다.)

① $\overline{BC}$의 길이 **② 이차방정식**



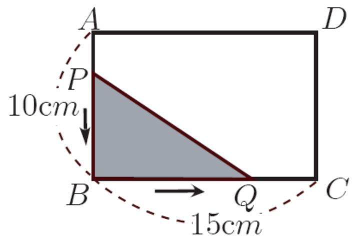
(4) 그림과 같이 가로의 길이가 $6m$, 세로의 길이가 $4m$인 직사각형 모양의 호수가 있다. 호수의 둘레에 폭이 xm로 일정한 길을 만들었더니 길의 넓이가 $96m^2$가 되었다.

① 호수와 길을 포함한 부분은 가로와 세로의 길이 **② 이차방정식**



(5) 그림과 같이 $\overline{AB}=10cm$, $\overline{BC}=15cm$인 직사각형 $ABCD$가 있다. 점 P는 점A로부터 B까지 매초 $1cm$의 속력으로 움직이고, 점 Q는 점B로부터 C까지 매초 $2cm$의 속력으로 움직인다. P, Q가 동시에 출발할 때, 몇 초 후에 $\triangle BPQ$의 넓이가 $21cm^2$가 된다.(몇 초 후를 x로 한다.)

① x후의 $\overline{PB}$, $\overline{BQ}$의 길이 **② 이차방정식**



3 계산예제

원리탐구

다음 주어진 문자를 사용한 이차방정식을 세워라.

(1) 수순이가 속한 동아리에서는 축제에 쓸 가면 120개를 몇 명의 학생들이 똑같이 나누어서 만들기로 하였는데, 갑자기 2명이 오지 않아 나머지 학생들이 예상보다 5개씩 더 만들게 되었다.(처음에 같이 만들기로 한 학생 수를 x라 한다.)

① x명 중 1명이 만들기로 한 가면의 수 ② 이차방정식

(2) 길이가 $24cm$인 끈을 두 개로 나누어서 두 개의 정사각형을 만들어 두 정사각형의 넓이의 비가 1 : 2가 되도록 하였다.(작은 정사각형의 한 변의 길이 x로 한다.)

① 큰 정사각형의 한 변의 길이 ② 이차방정식

풀이

답: (1) ① $\dfrac{120}{x}$개 ② $x^2-2x-48=0$ (2) ① $6-x$ ② $x^2+12x-36=0$

(1) ① x명이 가면 120개를 똑 같은 수로 만들기로 하였으므로 1명이 만들기로 한 가면의 수는 $\dfrac{120}{x}$개다.

② 나머지 학생 수 $x-2$와 1명당 만든 가면의 수를 곱하면 120개가 되므로 다음식이 성립한다.

$(x-2)\left(\dfrac{120}{x}+5\right)=120,\ 120+5x-\dfrac{240}{x}-10=120,\ x^2-2x-48=0$

(2) ① 작은 정사각형의 둘레의 길이가 $4x$이므로 큰 정사각형의 둘레의 길이는 $24-4x$이다. 따라서 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{24-4x}{4}=6-x$이다.

② 두 정사각형의 넓이의 비가 1 : 2이므로 다음 식이 성립한다.

$(6-x)^2=2x^2,\ x^2+12x-36=0$

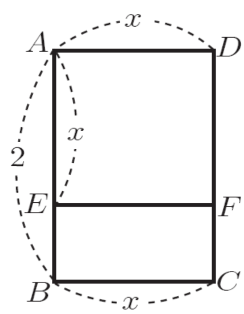
유제 3

다음 주어진 문자를 사용한 이차방정식을 세워라.

(1) 귤 180개를 몇 명의 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 한 사람에게 돌아가는 귤의 수는 학생 수보다 3만큼 작다고 한다.(학생 수를 x라 한다.)

① 한 사람에게 돌아가는 귤의 개수 ② 이차방정식

(2) 그림과 같이 직사각형 $ABCD$의 변 AD를 한 변으로 하는 정사각형 $AEFD$가있다. 직사각형 $FEBC$가 직사각형 $ABCD$와 닮은꼴일 때, $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$의 길이의 비를 황금비라 한다. $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=x$이다.



4 계산예제 　　　　원리탐구

다음 주어진 문자를 사용한 이차함수식을 세워라.

한 개에 원가 2000 원인 물건을 정가 3000 원에 팔면 하루에 200 개를 팔 수 있다. 정가를 $10x$ 원씩 내리면 판매량이 하루에 $4x$ 개씩 증가한다. 이 가게의 하루의 이익을 구하는 과정에서 다음을 구여라.(물건의 개수를 x, 하루에 얻는 이익을 y 라 한다.)

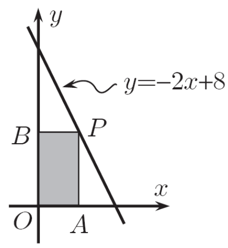
① 정가에서 $10x$ 원 내렸을 때 한 개의 판매 가격

② 정가를 $10x$ 원씩 내렸을 때 하루 판매량 　　　　**③ 이차함수식**

(2) 합이 10 인 두 수에서 두 수의 곱을 구하여라.(한 수를 x, 두 수의 곱을 y라 한다.)

① 다른 한 수 　　　　**② 이차함수식**

(3) 그림과 같이 일차함수 $y=-2x+8$ 의 그래프 위의 한 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 할 때, 직사각형의 넓이가 $OAPB$ 이다. 다음을 구하여라.(점 P 의 x 좌표를 x, 직사각형 $OAPB$ 의 넓이를 S 라 하자.)



① 점 P 의 좌표 　　　　**② 이차함수식**

풀이 　**답: 풀이참조**

(1) ① 정가 3000 원에서 $10x$ 원 내렸을 때 한 개의 판매 가격은 $(3000-10x)$ 원이다.

② 하루의 판매량은 $(200+4x)$ 개이다.

③ 하루에 얻는 이익은 총 판매액에서 총 원가를 제외한 금액이므로 다음식이 성립한다.

$y=(3000-10x)(200+4x)-2000(200+4x)=(1000-10x)(200+4x)=-40x^2+2000x+200000$

$y=-40x^2+2000x+200000$

(2) ① 합이 10 이므로 다른 한 수는 $10-x$ 이다.

② 두 수의 곱이 y 이므로 다음식이 성립한다.

$y=x(10-x),\ y=-x^2+10x$

(3) ① 직선의 식이 $y=-2x+8$ 이고, 점 P 의 x 좌표가 x 이므로 $P(x, -2x+8)$ 이다.

② 직사각형의 넓이는 가로곱하기 세로이므로 다음식이 성립한다.

$S=x(-2x+8)=-2x^2+8x$, $S=-2x^2+8x$

유제 4

다음 주어진 문자를 사용한 이차함수식을 세워라.

(1) 한 개당 100원씩 팔면 400개 팔리는 귤을 한 개당 가격을 x원 올리면, $2x$개 적게 팔린다고 한다. 귤의 총 판매 금액(y원)을 구하여라.

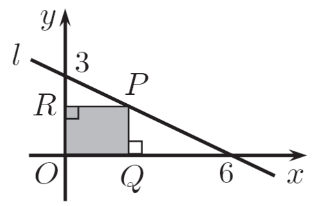
① **정가를 x원씩 올렸을 때 하루 판매량** ② **이차함수식**

(2) 차가 16인 두 수의 곱을 구하여라.(작은 수를 x, 두 수의 곱을 y라 한다.)

① **큰 수** ② **이차함수식**

(3) 그림과 같이 직선 l 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 할 때, $\square OQPR$의 넓이가 S이다. 다음을 구하여라.(점 P의 x좌표를 x라 하자.)

① **l의 직선의 식** ② **점 P의 좌표**



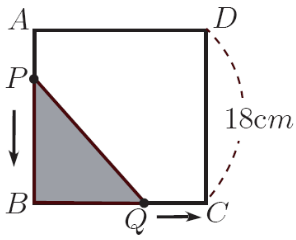
③ **이차함수식**

5 계산예제

원리탐구

다음 주어진 문자를 사용한 이차함수식을 세워라.

(1) 한 변의 길이가 $18cm$ 인 정사각형 $ABCD$ 에서 점 P 는 점 A 를 출발하여 점 B 까지 매초 $2cm$ 의 속력으로 $\overline{AB}$ 위를 움직이고, 점 Q 는 점 B 를 출발하여 점 C 까지 매초 $1cm$ 의 속력으로 $\overline{BC}$ 위를 움직인다. 두 점 P, Q 가 동시에 출발할 때, $\triangle PBQ$ 의 넓이는 y 이다.(몇 초 후를 x 로 한다.)



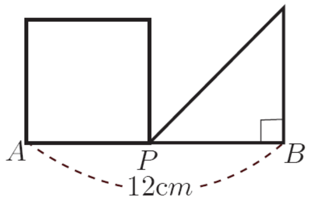
① x 초 후의 $\overline{PB}, \overline{BQ}$ 의 길이 ② 이차함수식

(2) 그림과 같이 $20m$ 인 철망으로 직사각형 모양의 닭장을 만들려고 한다.(닭장의 넓이가 y 이고 세로가 x 라 하자.)

① 가로의 길이 ② 이차함수식

(3) 그림과 같이 길이가 $12cm$ 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 정사각형과 직각이등변삼각형을 만들어 넓이의 합을 y 라 할 때, 다음을 구하여라.($\overline{AP}=x(cm)$ 라 하자.)

① $\overline{BP}$ 의 길이 ② 이차함수식



풀이 **답: 풀이참조**

(1) ① x 초 후에 $\overline{AP}=(18-2x)cm$, $\overline{BQ}=x\,cm$ 가 된다.

② x 초 후에 $\triangle PBQ$ 의 넓이가 $y\,cm^2$ 이 되므로 다음식이 성립한다.

$y=\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{BQ}=\frac{1}{2}\times(18-2x)\times x,\ y=-x^2+9x$

(2) ① 전체 철망의 길이가 $20m$ 이므로, 직사각형의 가로의 길이는 $(20-2x)m$ 이다.

② 닭장의 넓이를 y 라고 하면 직사각형의 넓이는 가로곱하기 세로이므로 다음식이 성립한다.

$y=x(20-2x), y=-2x^2+20x$

(3) ① $\overline{AP}=x(cm)$ 이므로 $\overline{BP}=(12-x)(cm)$ 이다.

② 정사각형과 직각이등변삼각형의 넓이 $y\,cm^2$ 은 다음식이 성립한다.

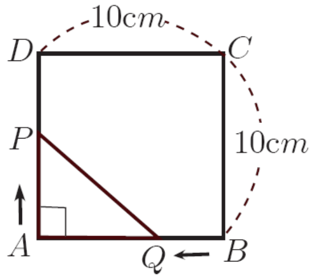
$y=x^2+\frac{1}{2}(12-x)^2,\ y=\frac{3}{2}x^2-12x+72$

유제 5

다음 주어진 문자를 사용한 이차함수식을 세워라.

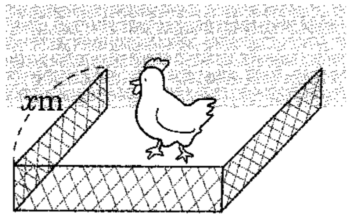
(1) 그림은 한 변의 길이가 $10cm$인 정사각형이다. 점 P는 매초 $2cm$의 속력으로 점 A에서 점 D로 움직이고, 점 Q는 매초 $1cm$의 속력으로 점 B에서 점 A로 움직인다. $\triangle APQ$의 넓이는 y이다.(몇 초 후를 x로 한다.)

① x초 후의 $\overline{PA}$, $\overline{AQ}$의 길이　　　② 이차함수식



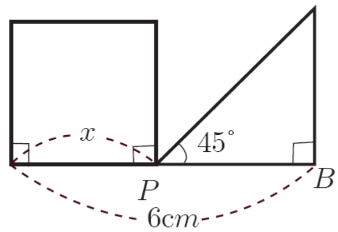
(2) 그림과 같이 길이가 $16m$인 철망으로 직사각형 모양의 닭장을 만들려고 한다.(닭장의 넓이가 y이고 세로가 x라 하자.)

① 가로의 길이　　　② 이차함수식



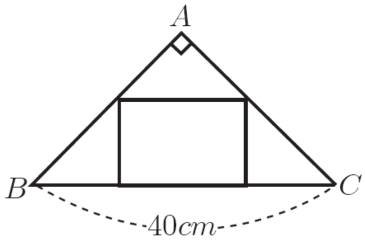
(3) 그림과 같이 길이가 $6cm$인 선분 AB위에 점 P를 잡아서 정사각형과 직각이등변삼각형을 만들어 넓이의 합을 y라 할 때, 다음을 구하여라.($\overline{AP}=x(cm)$라 하자.)

① $\overline{BP}$ 의 길이　　　② 이차함수식



(4) 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 이고, 빗변의 길이가 $40cm$인 직각이등변삼각형 ABC에 내접하는 직사각형을 그렸다.(직사각형의 세로의 길이를 xcm라 하고, 넓이를 ycm^2라 하자.)

① 직사각형의 가로의 길이　　　② 이차함수식



종합문제

1. **다음 주어진 문자를 사용한 이차방정식을 세워라.**

(1) 어떤 자연수를 제곱한 것이 그 수를 2배한 것과 같다.(어떤 자연수를 x 라 한다.)

(2) 어떤 수의 3배에서 4를 뺀 것과 처음 수에 5를 더한 것과의 곱이 -16이다.(어떤 수를 x 라 한다.)

(3) 연속하는 두 짝수의 곱이 120 이다.(작은 짝수를 $2x$ 라 한다.)

(4) 연속된 두 자연수의 곱이 56이다.(작은 수를 x라 한다.)

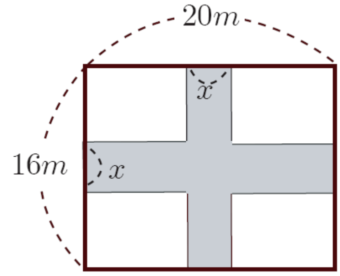
(5) 연속하는 네 개의 정수의 합은 이 가운데 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 곱과 같다. (가장 작은 정수를 x라 한다.)

(6) 연속된 두 양의 홀수의 곱이 63 이다.(작은 홀수를 x라 한다.)

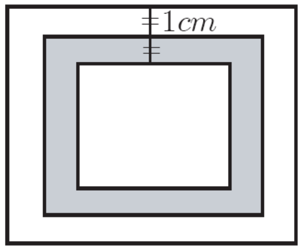
(7) 연속되는 세 자연수 중 가장 큰 수의 제곱은 나머지 두 수의 제곱의 합보다 46만큼 크다. (중간 수를 x로 한다.)

2. **다음 주어진 문자를 사용한 이차방정식을 세워라.**

(1) 가로의 길이가 $20m$, 세로의 길이가 $16m$인 직사각형 모양의 땅에 그림과 같이 폭이 x인 십자형의 도로를 만들려고 한다. 도로를 제외한 땅의 넓이가 $221m^2$이다.



(2) 그림과 같이 정사각형 세 개가 포개어져 있다. 가장 큰 정사각형의 넓이가 나머지 두 정사각형의 넓이의 합과 같다.(가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하자.)



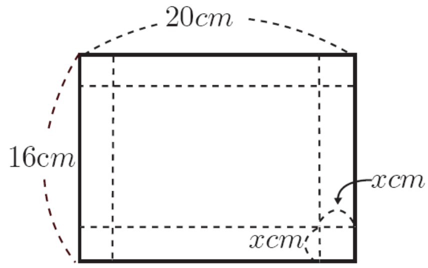
(3) 가로가 세로보다 $3cm$ 더 긴 직사각형이 있다. 가로를 $\frac{1}{2}$로 줄이고 세로를 $1cm$ 늘리면 넓이가 $6cm^2$ 감소한다고 한다.(가로의 길이를 x로 하자.)

(4) 어떤 원의 반지름의 길이를 $5cm$만큼 짧게 하였더니 처음 원의 넓이의 $\frac{1}{2}$이 되었다. (처음 원의 반지름의 길이를 x로 한다.)

3. **다음 주어진 문자를 사용한 이차방정식을 세워라.**

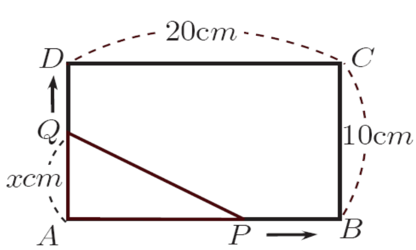
(1) 둘레의 길이가 $32cm$인 직사각형의 넓이가 $48cm^2$이다.(짧은 변 길이를 x라 하자.)

(2) 그림과 같이 가로와 세로의 길이가 각각 $20cm$, $16cm$인 직사각형의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 xcm인 정사각형을 잘라내어, 상자를 만들려고 한다. 상자의 바닥의 넓이가 $140cm^2$이다.



(3) 넓이가 $40cm^2$인 삼각형이 있다. 그 높이는 밑변의 길이보다 $2cm$ 짧다고 한다.(밑변의 길이를 x라 하자.)

(4) 그림과 같은 직사각형 $ABCD$의 꼭짓점 A에서 점 P는 $\overline{AB}$위를 A로부터 B까지 매초 $2cm$의 속력으로 움직이고, 점 Q는 $\overline{AD}$위를 A로부터 D까지 매초 $1cm$의 속력으로 움직이고 있다. 점 P가 출발한 2초 후에 Q가 출발한다. 점 Q가 출발한 몇 x초 후에 $\triangle APQ$의 넓이가 $48cm^2$가 되었다.



4. 다음 주어진 문자를 사용한 이차방정식을 세워라.

(1) 사탕 108 개를 몇 명의 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 한 학생이 받는 사탕의 수가 학생의 수보다 3 만큼 작다.(학생 수를 x 명이라 하자.)

(2) 선분을 분할하면 긴 길이와 짧은 길이로 나뉜다. 황금비란 선분의 분할로 주어지는데, (전체길이): (긴 길이) = (긴 길이):(짧은 길이)를 만족하는 분할의 비를 말한다.(전체의 길이를 2, 긴 길이를 x 라 하자.)

(3) 수돌이는 대학을 졸업한 후 공부를 계속하느라 일생의 제곱의 $\frac{1}{100}$ 이 되어서야 결혼을 했고, 2 년 후에 사랑스런 딸 태희를 낳았다. 태희가 태어난 후 그의 일생의 제곱의 $\frac{1}{200}$ 이 지났을 때에 태희가 대학에 들어갔고 4년 후에 태희의 졸업식을 본 후 그는 생애를 마쳤다.(그의 나이를 x 라 하자.)

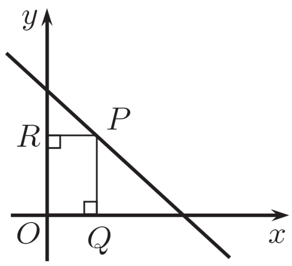
(4) A모임에서 한 사람은 서로 다른 사람과 모두 한 번씩 악수를 한다. A모임에서 총 36번의 악수가 이루어졌다.(A모임에 참가한 사람 수를 x 라 하자.)

5. **다음 주어진 문자를 사용한 이차함수식을 세워라.**

(1) 어떤 공원에서 입장료가 1000원일 때, 입장객이 500명이었다. 이 때, 입장료를 100원씩 올리면 입장객은 10명씩 줄어든다고 한다. 이 공원의 하루 총 수입을 구하는 과정에서 다음을 구여라.(하루 입장객수를 x, 하루에 얻는 이익을 y 라 한다.)

(2) 현재 한 개의 300원에 판매되는 음료수는 매일 4000개씩 팔리고 있다. 음료수의 가격을 x원 올리면 판매량은 $10x$개 줄어든다고 한다. 하루 매출액을 y 라 한다.

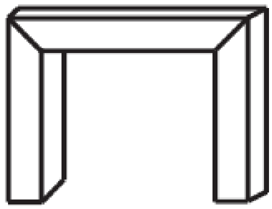
(3) 그림과 같이 직선 $y=-x+6$ 위의 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 $OQPR$ 의 넓이를 y한라.)



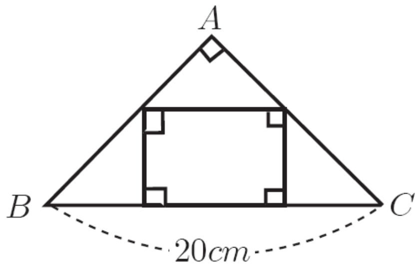
(4) 길이가 $24cm$ 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 y 이자.(부채꼴의 반지름의 길이를 x 라 한다.)

6. **다음 주어진 문자를 사용한 이차함수식을 세워라.**

(1) 총 길이가 $32m$인 목재가 있다. 이 목재를 사용하여 체육대회 때 선수단이 입장할 직사각형 모양의 문을 그림과 같이 세우려고 한다. 문의 통로의 넓이를 y라 하자.(문의 높이를 x라 하고, 목재의 두께는 생각하지 않는다.)

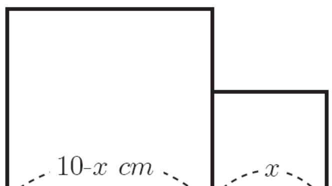


(2) 그림과 같이 빗변의 길이가 $20cm$인 직각이등변삼각형 ABC의 내부에 직사각형을 내접시킬 때, 직사각형의 넓이를 y라 하자.(직사각형의 세로의 길이를 x라 한다.)



(3) 밑변의 길이가 $8cm$, 높이가 $12cm$인 삼각형이 있다. 이 삼각형의 밑변의 길이를 xcm만큼 늘이고, 높이를 xcm만큼 줄여서 만든 삼각형의 넓이를 y라 하자.

(4) 그림과 같이 길이가 $10cm$인 선분을 둘로 나누어 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형을 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합을 y라 하자.(한 정사각형의 한변의 길이를 x라 한다.)

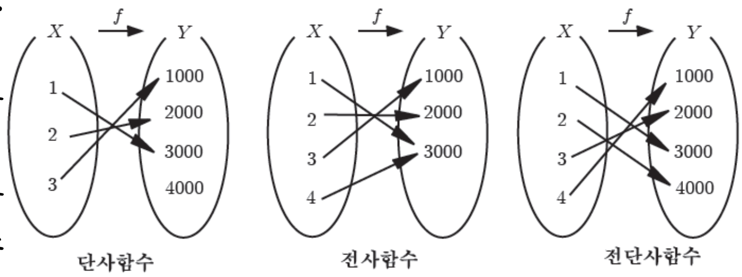


[생활 속의 수학이야기]

1. 함수와 유클리드 5번째 공리의 오류

함수는 공역과 치역의 관계에 따라 단사함수, 전사함수, 전단사함수라는 이름을 붙인다. 이제 하나씩 알아보자.

첫째, 아래 왼쪽 그림과 같이 정의역의 각 원소가 치역의 각 원소와 꼭 하나씩 대응되는 경우가 있다. 이때 공역에는 대응되지 않는 원소가 있어도 된다. 이것은 정의역의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 경우다. 함수가 이와 같은 성질을 만족할 때 이 함수를 단사함수라고 한다. 이것을 다시 쓰면 함수 f가 단사함수일 필요충분조건은 $f(x_1) = f(x_2)$이면 $x_1 = x_2$이다.

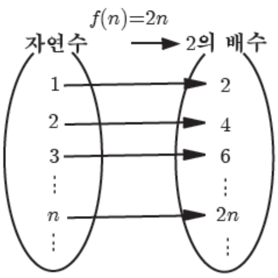


이것은 앞에서 소개했던 함수의 정의와 유사하기 때문에 이 성질을 이용할 때 항상 조심해야 한다.

둘째, 치역과 공역이 일치하는 경우가 있다. 즉, 치역의 어떤 원소를 택하더라도 그 원소에 대응하는 정의역의 원소가 적어도 하나가 있는 경우다. 단사함수에서 예로 들었던 함수에서는 공역의 원소4000에 대응하는 정의역의 원소가 없었다. 그러나 가운데 그림과 같은 함수에서는 공역과 치역이 같고, 공역의 어떤 원소를 택해도 그에 대응하는 정의역의 원소가 적어도 하나씩은 반드시 있다. 이런 함수를 전사함수라고 한다.

셋째, 정의역의 각 원소가 치역의 각 원소와 꼭 하나씩 대응되며 치역과 공역이 일치하는 경우, 즉 단사함수이며 동시에 전사함수인 경우가 있다. 이런 함수를 전단사함수라고 하며 간단히 일대일대응이라고 한다. 예를 들어, 사다리타기 게임과 같이 정의역의 원소 하나에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응되고 공역과 치역이 일치하는 경우다. 이 경우 정의역의원소와 공역의 원소가 일대일로 짝지어지기 때문에 정의역의 원소의 개수와 공역의원소의 개수가 같다. 즉, 사다리타기 게임은 전단사함수다.

전단사함수는 수학을 한 단계 끌어올리는 중요한 역할을 했다. 오랫동안 수학의 기본원리로 여겨졌던 유클리드 『원론』의 공리를 무너뜨리는 역할을 했기 때문이다. 유클리드 『원론』의 5번째 공리는 '전체는 부분보다 크다' 이다. 전체는 그것의 일부분보다 크다는 것은 분명한 사실처럼 보인다. 그러나 무한과 일대일 대응이 함께 관련되어 있다면 이 말은 자명하지 않을 수 있다.



우리가 알고 있는 무한 가운데 가장 쉬운 자연수를 예로 들어보자. 자연수의 집합과 짝수의 집합을 생각해보자. 짝수의 집합은 자연수의 집합의 '부분' 이다. 그런데 각 자연수 n에 대하여 n을 그것의 2배인 $2n$으로 보내는 함수$f(n) = 2n$을 생각해보자.

함수$f(n) = 2n$은 그림과 같이 자연수 n에 대하여 꼭 하나의 짝수 $2n$이 대응되므로 일대일 대응이다. 따라서 자연수 전체의 집합과 자연수 전체의 진부분 집합인 2의 배수의 집합은 서로 같은 수만큼의 원소를 가지고 있다. 즉, 전체는 그 일부분보다 크지 않게 된다. 그러므로 유클리드가 모든 영역에서 참이라고 주장했던 공리 가운데 5번째 공리는 참이 아님을 알 수 있다.

[출전: 오늘의 수학, 이 광연, 동아시아]