100문제를 푸는 것보다 문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

원리탐구 중등수학

중3수학 (상)

원리이해 및 내신대비 문제 **선행편**

Mathmatics The discovery of dharma

최경호 지음

홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이

원리탐구

중3(상) 선행 편 차례

제 1강

제곱근과 실수

무리수의 발견

"배신자를 물에 처넣어라."

사람들이 큰 소리로 외쳤다.

"나는 배신자가 아니다."

히파수스도 이들에 맞서 소리를 질렀다.

"히파수스, 너는 피타고라스학파의 맹세를 했었고, 지금 그것을 깨뜨린 것이다."

무리 중의 지도자가 선언하였다.

"나는 분수로는 나타낼 수 없는 수(무리수)가 존재한다는 놀라운 사실을 증명하였다. 너희는 이것을 비밀로 하라고 요구하는 것인가? 너희는 지금 나의 지식과 진리를 억압하는 것이다."

히파수스는 단호하게 말하였다.

"그것은 수가 아니라고 우리가 주장하는 것을 너도 알지 않느냐?"

지도자가 응답하였다.

"$\sqrt{2}$ 는 수이다. 이것은 측량할 때 사용되는 수가 아닌가? $\sqrt{2}$ 는 특수한 길이를 나타낸다. 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이를 정확히 표현할 수 있는 다른 수가 있는가?"

히파수스가 주장하였다.

선상의 피타고라스학파의 무리는 점점 더 분노하기 시작하였다. 진실이 그들을 흔들기 시작하였던 것이다. 갑자기, 그들은 고함을 치면서 움직이기 시작하였다. 모든 일은 순식간에 벌어졌다. 아무도 폭도들의 행위를 중단시킬 수 없었다.

"그를 물속에 처넣어라."

그들은 고함을 치면서 감출 수 없는 사실을 감추고자 노력하였다. $\sqrt{2}=1.414\cdots$

그들은 히파수스를 잡아서 갑판에서 바다로 던져버렸다.

바다를 항해하는 중에 히파수스는 $\sqrt{2}$ 에 대한 비밀을 폭로하려 하였다는 이유로 배 위의 군중들의 분노를 샀다. 그리고 그들은 '배신자'를 처형하였다. 이후 수백 년 동안 인간의 이성은 어둠 속 동굴을 헤어나지 못했다.

[그림참고: blog.naver.com/jaihong]

1. 제곱근의 뜻과 성질

(1) 제곱근의 뜻

어떤 수 x를 제곱하여 a가 되는 수, 즉 $x^2=a$일 때, x를 a의 **제곱근**이라고 한다.

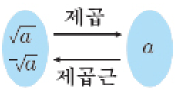
① 양수 a의 제곱근 $\Leftrightarrow$ $x^2=a$ $\Leftrightarrow$ $x=\pm\sqrt{a}$ $\Leftrightarrow$ 양의 제곱근은 $\sqrt{a}$, 음의 제곱근은 $-\sqrt{a}$

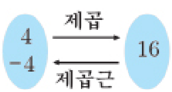
② 0의 제곱근은 0이다. $\Leftrightarrow$ $x^2=0$ $\Leftrightarrow$ $x=0$

③ 음수의 제곱근은 없다. $\Leftrightarrow$ $x^2\neq -5$

(예, $(\pm4)^2=16$이므로 16의 제곱근은 $4, -4$이고, 4는 16의 양의 제곱근이고, -4는 16의 음의 제곱근이다.)

· 양수 a의 양의 제곱근은 $\sqrt{a}$를 '제곱근 a', '루트 a'라고 읽는다.





※ 구별할 개념들

· 근호(제곱근)는 기호 $\sqrt{\ }$이다.

· 제곱근 a는 $\sqrt{a}$이고, a의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$이다.

· a의 제곱은 a^2이다.

(2) 제곱근의 성질

$a>0$일 때, $\sqrt{\ }$는 $\frac{1}{2}$제곱과 같은 의미이다. 따라서 $\sqrt{a^2}=(a^2)^{\frac{1}{2}}=a$이다.

$\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{(-a)\times(-a)}=\sqrt{a^2}=a,\ \ (-\sqrt{a})^2=(-\sqrt{a})\times(-\sqrt{a})=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a$

예를 들어 $\sqrt{3^2}=3$, $\sqrt{(-3)^2}=3$, $(-\sqrt{3})^2=3$이다.

① $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$ ② $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$

(3) $\sqrt{x^2}$의 성질

양수나 음수를 제곱하면 양수가 됨으로 다음을 주의하여야 한다.

① $\sqrt{x^2}=|x|$

(i) $0\le x$일 때, x (ii) $x<0$일 때, $-x$

숫자의 경우 $\sqrt{5^2}=(5^2)^{\frac{1}{2}}=5$, $\sqrt{(-5)^2}=-(-5)=5$(또는 $\sqrt{(-5)\times(-5)}=\sqrt{5^2}=5$)이다.

즉, 양수의 부호는 그대로 음수는 음의 부호를 붙여 양수를 만든다.(왜냐하면 음수를 두 번 곱하면 양수가 되기 때문이다.)

② $\sqrt{(x-a)^2}+\sqrt{(x-b)^2}$ (단, $b<a$)

(i) $a\le x$일 때, $(x-a)+(x-b)$

(ii) $b\le x<a$일 때, $-(x-a)+(x-b)$

(iii) $x<b$일 때, $-(x-a)-(x-b)$

(4) 완전제곱수

어떤 자연수의 제곱인 수를 **완전제곱수**라고 한다.

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9, 4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, $10^2=100$,

$11^2=121$, $12^2=144$, $13^2=169$, $14^2=196$, $15^2=225$, $16^2=256$, $17^2=289$,

$18^2=324$`, $19^2=361$, $20^2=400, \cdots$ 이므로 다음과 같은 수를 완전제곱수라고 한다.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, ⋯

(5) 제곱근의 대소 관계

$a>0, b>0$일 때,

(1) $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ ② $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$

1 선행예제

원리탐구

다음 물음에 답하여라.

(1) 다음을 구하여라.

① 제곱하여 81이 되는 수　② $x^2=4$에서 x의 값

③ 49의 제곱근　④ 제곱근 49

(2) 다음 수의 제곱근을 구하여라.

① 16　② 49　③ $\frac{1}{25}$

④ 2　⑤ 9^2　⑥ $\left(-\frac{4}{25}\right)^2$

풀이 답: (1) ① ± 9 ② ± 2 ③ ± 7 ④ 7

(2) ① ± 4 ② ± 7 ③ $\pm\frac{1}{5}$ ④ $\pm\sqrt{2}$ ⑤ $\pm\sqrt{9^2}=\pm 9$ ⑥ $\pm\frac{4}{25}$

(1) 제곱근 a는 $\sqrt{a}$이고, a의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$, a의 제곱은 a^2이다.

① 제곱하여 81가 되는 수는 ± 9이며, 81의 제곱근을 의미한다.

② $x^2=4$에서 x의 값은 ①과 같은 의미로서 ± 2이다.

③ 49의 제곱근은 ①, ②와 같은 의미로서 ± 7이다.

④ 제곱근 49는 $\sqrt{49}=7$로서 ①, ②, ③과 구별하여야 한다.

(2) ① $\pm\sqrt{16}=\pm 4$ ② $\pm\sqrt{49}=\pm 7$ ③ $\pm\sqrt{\frac{1}{25}}=\pm\frac{1}{5}$ ④ $\pm\sqrt{2}$ ⑤ $\pm\sqrt{9^2}=\pm 9$

⑥ $\left(-\frac{4}{25}\right)^2=\left(\frac{4}{25}\right)^2$이므로 $\pm\sqrt{\left(-\frac{4}{25}\right)^2}=\pm\frac{4}{25}$이다.

유제 1

다음 물음에 답하여라.

(1) 다음을 구하여라.

① 제곱하여 64가 되는 수　② $x^2=16$에서 x의 값

③ 9의 제곱근　④ 제곱근 9

(2) 다음 수의 제곱근을 구하여라.

① 4　② 81　③ 0

④ 0.25　⑤ $\frac{9}{4}$　⑥ 13

⑦ 12^2　⑧ $(-7)^2$　⑨ $\left(\frac{2}{5}\right)^2$

2 선행예제

원리탐구

다음 물음에 답하여라.

(1) 다음 수를 $\sqrt{\ }$를 사용하지 않고 나타내어라.

① $(\sqrt{5})^2$　② $\sqrt{9}$　③ $\sqrt{\dfrac{4}{25}}$　④ $-\sqrt{0.04}$

⑤ $-\sqrt{(-17)^2}$　⑥ $\pm\sqrt{0.25}$　⑦ $\left(-\sqrt{\dfrac{13}{7}}\right)^2$　⑧ $-(-\sqrt{49})^2$

(2) 다음을 간단히 하여라.

① $\sqrt{(-3)^2}+\sqrt{7^2}$　② $\sqrt{49}-\sqrt{4^2}$　③ $\sqrt{(-7)^2}-\sqrt{25}$

④ $\sqrt{(-9)^2}\times\sqrt{(-7)^2}$　⑤ $(\sqrt{5})^2\times(-\sqrt{3})^2$　⑥ $\sqrt{3}\times\sqrt{3}\div\sqrt{(-3)^2}$

풀이 답: (1) ① 5　② 3　③ $\dfrac{2}{5}$　④ -0.2　⑤ -17　⑥ ±0.5　⑦ $\dfrac{13}{7}$　⑧ -49

(2) ① 10　② 3　③ 2　④ 63　⑤ 15　⑥ 1

$\sqrt{\ }$는 $\dfrac{1}{2}$제곱과 같은 의미이며, 양수나 음수를 제곱하면 양수가 됨으로 다음을 주의하여야 한다.

$\sqrt{x^2}=|x|$ (ⅰ) $0\le x$일 때, x (ⅱ) $x<0$일 때, $-x$

(1) ① 5　② $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$　③ $\sqrt{\dfrac{4}{25}}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{2}{5}$　④ $-\sqrt{0.04}=-\sqrt{(0.2)^2}=-0.2$

⑤ $-\sqrt{(-17)^2}=-\sqrt{17^2}=-17$　⑥ $\pm\sqrt{0.25}=\pm\sqrt{(0.5)^2}=\pm0.5$

⑦ $\left(-\sqrt{\dfrac{13}{7}}\right)^2=\left(\sqrt{\dfrac{13}{7}}\right)^2=\dfrac{13}{7}$　⑧ $-(-\sqrt{49})^2=-(\sqrt{49})^2=-49$

(2) ① $3+7=10$　② $7-4=3$　③ $7-5=2$　④ $9\times7=63$　⑤ $5\times3=15$　⑥ $3\div3=1$

유제 2

다음 물음에 답하여라.

(1) 다음 수를 $\sqrt{\ }$를 사용하지 않고 나타내어라.

① $\sqrt{7^2}$　② $\sqrt{4}$　③ $\sqrt{\dfrac{16}{9}}$　④ $-\sqrt{100}$

⑤ $\sqrt{(-1.9)^2}$　⑥ $-\sqrt{(-3)^2}$　⑦ $\pm\sqrt{225}$　⑧ $\sqrt{40-15}$

(2) 다음을 간단히 하여라.

① $(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2$　② $\sqrt{(-3)^2}-\sqrt{16}$　③ $(-\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2$

④ $\sqrt{(-2)^2}\times\sqrt{(-7)^2}$　⑤ $\sqrt{7^2}\times\left(-\sqrt{\left(\dfrac{1}{7}\right)^2}\right)$　⑥ $-\sqrt{\dfrac{9}{49}}\div(-\sqrt{3})^2$

3 선행예제

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

(2) $a<3$일 때, $\sqrt{(a-3)^2}$

(3) $a<0$일 때, $\sqrt{(-a)^2}-\sqrt{4a^2}$

(4) $3<x<5$일 때, $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-5)^2}$

풀이 답: (1) $2-\sqrt{3}$ (2) $3-a$ (3) a (4) 2

(1) $2>\sqrt{3}$ 이므로 $\sqrt{3}-2<0$, $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=-(\sqrt{3}-2)=2-\sqrt{3}$ 이다.

(2) $a<3$이므로 $a-3<0$, $\sqrt{(a-3)^2}=-(a-3)=3-a$이다.

(3) $a<0$이므로 $-a>0$, $\sqrt{(-a)^2}-\sqrt{4a^2}=\sqrt{(-a)^2}-\sqrt{(2a)^2}=-a-(-2a)=a$이다.

(4) $3<x<5$이므로 $x-3>0$, $x-5<0$, $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-5)^2}=x-3-(x-5)=2$이다.

유제 3

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{\{-(\sqrt{5}-3)\}^2}$

(2) $a>0$일 때, $\sqrt{(5a)^2}+\sqrt{(-a)^2}$

(3) $a<0$일 때, $\sqrt{(-5a)^2}-(\sqrt{-a})^2$

(4) $x<7$일 때, $\sqrt{(x-7)^2}$

(5) $-4<x<3$일 때, $\sqrt{(x+4)^2}-3\sqrt{(x-3)^2}$

2. 무리수와 실수

(1) 무리수 (*irrational number*)

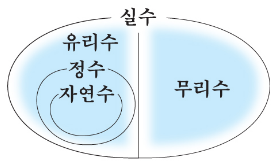
① a, b가 정수이고 $a\neq 0$일 때, $\dfrac{b}{a}$ 인 분수 꼴로 나타낼 수 없는 수

② $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 과 같이 순환하지 않는 무한소수로 나타내어지는 수

소수 { 유한소수 ································· } 유리수
　　　무한소수 { 순환소수 ···················· }
　　　　　　　　순환하지 않는 무한소수 ····· 무리수

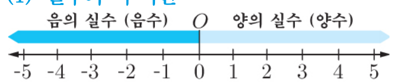
(2) 실수: 유리수와 무리수 모두 통틀어 실수라 한다.

실수 {
- 유리수 {
  - 정수 { 양의 정수(자연수), 0, 음의 정수
  - 정수가 아닌 유리수
- 무리수 ··· 순환하지 않는 무한소수



3. 실수의 수직선과 대소 관계

(1) 실수와 수직선

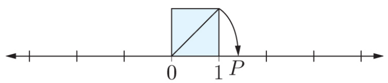


① 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 일대일 대응하는 점으로 채워져 있다.

② 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 존재한다.

③ 두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수와 무리수가 존재한다.
　두 무리수 사이에는 무수히 많은 유리수와 무리수가 존재한다.

(2) 수직선 위에 무리수 위치 잡기



한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

선분 OP 를 반지름으로 하는 원을 그려 수직선과 만난점이 $\sqrt{2}$ 이다. 따라서 수직선 위에는 유리수에 대응하는 점뿐만 아니라 무리수에 대응하는 점들도 있다.

(3) 실수의 대소 관계

① 일반적으로 실수의 대소 관계에서도 유리수의 경우와 같이 다음이 성립한다.
- 양수는 0보다 크고, 음수는 0보다 작다.
- 양수는 음수보다 크다.
- 두 양수에서는 절댓값이 큰 수가 크다.
- 두 음수에서는 절댓값이 큰 수가 작다.

② 임의의 a, b에 대하여 두 수의 차를 구한 후 그 부호를 통하여 알 수 있다.
- $a-b>0$ 이면 $a>b$
- $a-b=0$ 이면 $a=b$
- $a-b<0$ 이면 $a<b$

4 선행예제

원리탐구

다음 |보기| 중에서 틀린 것을 모두 골라라.

|보기|
① 모든 무한소수는 무리수이다.
② $a>0$일 때, $\sqrt{a}$는 무리수이다.
③ 유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 한다.
④ 원주율 π를 수직선 위의 점에 대응시킬 수 있다.
⑤ 유리수와 무리수를 모두 수직선 위의 점에 대응시킬 수 있다.
⑥ $\sqrt{6}+3$은 $\sqrt{6}$과 $\sqrt{18}$사이에 있는 무리수이다.
⑦ $\frac{1}{2}$와 $\frac{1}{3}$사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

풀이 답: ①, ②, ⑥

① 순환소수는 무한소수이지만 유리수이다.
② a가 제곱수이면 $\sqrt{a}$는 유리수이다.
⑥ $\sqrt{18}<\sqrt{6}+3$이므로 $\sqrt{6}+3$은 $\sqrt{6}$과 $\sqrt{18}$ 사이에 있는 무리수가 아니다.

유제 4

다음 중 옳은 것은?

① 모든 무한소수는 무리수이다.
② 유리수는 유한소수이다.
③ $a>0$일 때, $\sqrt{a}$는 무리수이다.
④ 유리수는 수직선 위의 점에 대응시킬 수 있으나 무리수는 대응시킬 수 없다.
⑤ 원주율 π를 수직선 위의 점에 대응시킬 수 있다.

5 선행예제

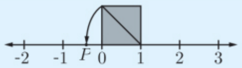
다음 물음에 답하여라.

(1) 다음 수직선 위에서 점 P에 대응하는 수를 구하여라.

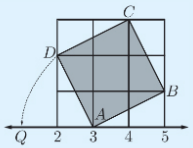
(한 변의 길이가 1인 정사각형)

① $1+\sqrt{2}$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}$

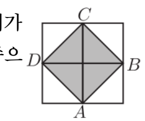
④ $1-\sqrt{2}$ ⑤ $2+\sqrt{2}$



(2) 다음 정사각형으로 된 모눈종이에서 □$ABCD$는 정사각형이다. Q의 좌표를 구하여라.



풀이 답: (1) ④ (2) $3-\sqrt{5}$

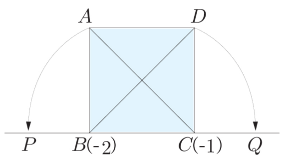


(1) 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 그림과 같이 넓이가 2인 정사각형의 한 변의 길이이므로 $\overline{DA}=\sqrt{2}$ 이고, 기준점 1에서 왼쪽으로 이동했으므로 점 P에 대응하는 수는 $1-\sqrt{2}$ 이다.

(2) 정사각형의 넓이는 한 변의 길이 a^2 이다. 그림의 정사각형 $ABCD$의 넓이는 밖의 정사각형의 넓이에서 직각삼각형 4개의 넓이를 뺀 값 즉, $9-4\times1=5$ 이다. 따라서 $a^2=5$ 임으로 $a=\sqrt{5}$ 이고 3에서 왼쪽 방향에 Q가 있으므로 Q의 좌표는 $3-\sqrt{5}$ 이다.

유제 5

다음 그림에서 사각형 $ABCD$는 정사각형이고, $B(-3)$, $C(-2)$이다. $\overline{PQ}$의 길이를 구하여라. (단, $\overline{BD}=\overline{BQ}$, $\overline{CA}=\overline{CP}$)



6 선행예제

세 수 $a=\sqrt{5}-\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$, $c=\sqrt{3}$의 대소 관계를 구하려고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) a, b의 대소 관계를 구하여라.

(2) a, c의 대소 관계를 구하여라.

(3) a, b, c의 대소 관계를 구하여라.

풀이 답: (1) $a>b$ (2) $a<c$ (3) $b<a<c$

임의의 a, b에 대하여 두 수의 차를 구한 후 그 부호를 통하여 알 수 있다.

$a-b>0$ 이면 $a>b$, $a-b=0$ 이면 $a=b$, $a-b<0$ 이면 $a<b$이다.

(1) $a-b=(\sqrt{5}-\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=\sqrt{5}-2>0$ $\therefore a>b$

(2) $a-c=(\sqrt{5}-\sqrt{3})-\sqrt{3}=\sqrt{5}-2\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{12}<0$ $\therefore a<c$

(3) (1), (2)에 의해 $b<a<c$이다.

유제 6

다음 중 대소 관계가 옳은 것은?

① $\sqrt{3}-1>1$ ② $\sqrt{5}+3<\sqrt{5}+\sqrt{8}$ ③ $0.1>\sqrt{0.1}$

④ $-\sqrt{50}>-7$ ⑤ $\sqrt{\frac{1}{3}}>\frac{1}{2}$

종합문제

1. 다음 수의 제곱근을 구하여라

(1) 6^2　　(2) $(-3)^2$

(3) $(-0.4)^2$　　(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$

2. 36 의 양의 제곱근을 a , $(-5)^2$ 의 음의 제곱근을 b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

3. 다음 중 옳지 않은 것은?

① 25 의 제곱근은 ± 5 이다.　② $\sqrt{5}$ 의 제곱근은 ± 5 이다.

③ 제곱근 4 는 2 이다.　④ $a<0$ 이면 $\sqrt{(-a)^2}=-a$ 이다.

⑤ -3 은 9 의 제곱근이다.

4. 다음물음에 답하여라.

(1) $a>0$ 일 때, $\sqrt{(-2a)^2}+\sqrt{(3a)^2}$ 의 값을 구하여라.

(2) $0<a<1$일 때, $\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$ 을 간단히 하여라.

5. $\sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ 을 간단히 하여라.

6. 다음물음에 답하여라.

(1) $4<\sqrt{x}<5$ 를 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

(2) $6<\sqrt{3x}<9$를 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

7. $\sqrt{10-a}$ 가 정수가 되도록 하는 자연수 a 의 값을 모두 합하면 얼마인가?

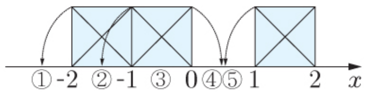
8. 다음 중 옳은 것은?

① 169 의 제곱근은 13 이다.
② $\sqrt{81}=\pm\sqrt{9}$ 이다.
③ $0<x<2$ 일 때, $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(2-x)^2}=0$ 이다.
④ $\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{10}$ 이다.
⑤ $\sqrt{(-8)^2}=8$ 이다.

9. 다음 중 옳은 것은?

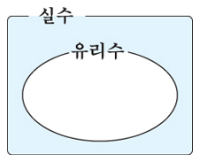
① 순환소수는 무리수이다.
② 순환하지 않는 무한소수는 유리수이다.
③ 정수가 아닌 모든 유리수는 무한 소수이거나 순환소수이다.
④ 무한소수는 모두 순환소수이다.
⑤ 실수 중에는 유리수이면서 동시에 무리수인 수는 존재하지 않는다.

10. 다음 그림의 사각형들은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 그 대각선의 길이를 반지름으로 하는 호를 점선으로 나타내었을 때, $\sqrt{2}-1$ 에 대응하는 점을 구하여라.



11. 다음 중 아래 벤 다이어그램에서 어두운 부분에 속하는 원소를 골라라.(정답 2 개)

① $\sqrt{4}$ ② $\sqrt{3}+1$ ③ $\sqrt{0.09}$ ④ $\sqrt{121}$ ⑤ π



12. $-\sqrt{16}-\sqrt{(-7)^2}+\sqrt{(-5)^2}-\sqrt{144}$ 를 계산하여라.

13. a는 유리수이고, b, c는 무리수일 때, 다음 중 항상 무리수인 것을 골라라.

① $a+b$ ② $b-c$ ③ ac ④ $b \div c$ ⑤ bc

14. 다음 세 수의 대소 관계 중 옳은 것은?

$$a=\sqrt{5}+\sqrt{7},\ b=2+\sqrt{7},\ c=\sqrt{5}+3$$

① $b<a<c$ ② $c<a<b$ ③ $a<b<c$ ④ $b<c<a$ ⑤ $a<c<b$

15. 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

① 무리수는 분수로 나타낼 수 있다.
② $\sqrt{5}$와 $\sqrt{6}$ 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.
③ 유리수 더하기 무리수는 항상 유리수이다.
④ 수직선은 실수로 완전히 매울 수 있다.
⑤ $\sqrt{\ }$를 사용하여 나타낸 수는 모두 무리수이다.

생활과 수학

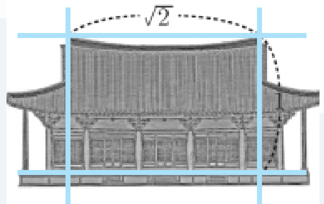
1. 황금비가 구현된 무량수전

오랜 세월동안 이 땅에 뿌리내리고 살아온 우리 조상들은 이 땅의 풍토에 가장 적합한 건축을 이룩했다. 전통 건축을 애정으로 바라보면 조상들의 슬기와 과학정신을 발견할 수 있다. 우리 건축 속에 숨은 기하학, 천문학, 수학을 찾아보자.

건축은 흔히 기술과 예술의 결합체라 한다. 삼국이 각각 고대국가로 성장해 세력을 다투던 7세기 초, 백제와 신라에 각각 세워진 미륵사와 황룡사의 가람 배치에서 보이는 규모의 거대함과 정연한 기하학적 질서는 그 대표적인 예이다. 그 이후의 시대에서는 이러한 거대 건축과 기하학적 응용을 다시 볼 수 없는데, 이는 마치 고차방정식을 다룰 수 있는 학생이 더 이상 일차방정식을 푼다고 자랑하지 않는 것과 같다.

고대의 최고 과학인 기하학과 천문학은 기술 뿐 아니라 예술에도 많은 영향을 주었다. 미륵사나 황룡사 같은 고대 사찰은 물론, 석굴암의 본존불에서 보이는 완전한 비례는 모두 기하학적 원리를 활용한 것이다. 서양의 르네상스 인들이 열심히 탐구했던 바와 같이, 시각적 아름다움은 대개 엄정한 수적 비례를 가지고 있다. 고대의 사찰 가람에는 구고현(句股弦)법에 의한 직각삼각형의 비례가 적용됐고, 배흘림기둥으로 유명한 부석사 무량수전의 평면에는 1 : 1.618 의 황금비가 적용됐다. 또 고구려의 장군총과 신라의 첨성대 등에는 모두 동서남북의 절대 방위가 숨어있다.

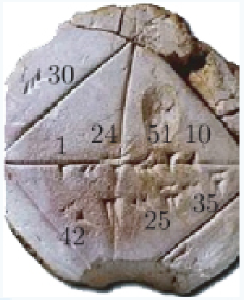
이와 같은 수학적 비례와 방위각을 이용한 것은 고대문명권 어디에서나 공통적으로 발견되는 미학의 기초개념이다. 때문에 그것들이 발현된 시기의 차이가 고대문명의 전파경로를 추적하는 단서가 되기도 한다.



읽을거리

1. 무리수의 역사적 배경

지금으로부터 4000 년 전의 것으로 추정되는 고대 바빌로니아 점토판에서 무리수의 흔적을 찾아 볼 수 있다. 아래 그림은 한 변의 길이가 30 인 정사각형의 대각선의 길이를 구하는 것을 나타내고 있다. 그림에서 나타난 숫자 1, 24, 51, 10 은 $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}+\cdots=1.41421\cdots$ 를 뜻하는 것으로 $\sqrt{2}$ 의 근사값에 해당한다.



또한 숫자 42, 25, 35 는 $42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}+\cdots=42.426\cdots$ 을 의미하는 것으로 $30\sqrt{2}$ 의 근사값으로 추정하고 있다. 이와 같이 바빌로니아 시대에는 비록 $\sqrt{2}$ 를 사용하고 있었으나 무리수 존재의 자체를 인식하였다고 볼 수는 없다.

무리수의 본격적인 발견은 피타고라스학파 사람들에 의해서이다. 예를 들면, 직각이등변삼각형의 빗변과 한 등변의 길이의 비, 정사각형의 대각선과 한 변의 길이의 비와 같이 정수의 비로 표현하기 쉽지 않다는 사실을 알게 되었다. 이후로 테아이테토스(*Theaetetos*)와 에우독소스(*Eudoxos*)등에 의해 무리수가 상당 부분 인정되었으나 무리수의 개념은 기하적으로 작도가 가능한 기하학적 사고에 머물렀다.

인도의 수학자들은 $\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{(3+12)+2\sqrt{3\cdot 12}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ 과 같이 무리수 계산을 즐겨 사용하였으나 논리적으로 인식을 못하였다. 그리하여 약 1500 년까지 유럽에서 무리수는 자연스럽게 사용되다가 스테빈(*Stevin, S.*), 윌리스(*Wallis, J.*), 데카르트(*Descartes, R.*) 등에 의해 무리수가 연속량을 나타낼 수 있는 추상적인 수로 인정되었다. 유리수와 무리수의 실질적인 다리가 놓인 것은 19세기 후반이며, 칸토어(*Cantor, G.*)와 데데킨트(*Dedekind, J.W.R*)에 이르러 정립이 되었다.

2. 제곱근 $\sqrt{\ }$ 의 역사

제곱근의 개념은 이미 기원전 6 세기경 그리스의 피타고라스학파에 의하여 피타고라스의 정리 발견과 동시에 나왔으나 그때까지는 $\sqrt{2}$ 등을 수로서 인정하지 않았다. 이것을 수로서 취급한 것은 인도인들이다. 이차방정식의 해법과 관련하여 7 세기 브라마굽타 시대에서는 $\sqrt{15}-\sqrt{10}$ 을 $Ka\ 15\quad Ka\,10$ 과 같이 나타내었다.

한편, 아라비아에서도 대수학에서의 연구가 발달하면서 제곱근을 *radix* 라고 하였다. 1228 년 레오나르도 피사로 이후에는 근호로서 라틴 문자 R를 사용하였으며 1525 년 루돌프(*Rudolff, C.*; 1499 ~ 1545)는 기호 $\sqrt{\ }$ 를 썼는데 이는 *radix* 의 첫 글자 *radix* 에서 나왔다고 한다. $\sqrt{\ }$ 에 가로 막대를 덧붙여 지금과 같은 꼴 $\sqrt{\ }$ 로 쓰기 시작한 사람은 프랑스의 데카르트(*Descartes, R.*; 1596~1650)라고 한다.