100문제를 푸는 것보다 문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

원리탐구 중등수학

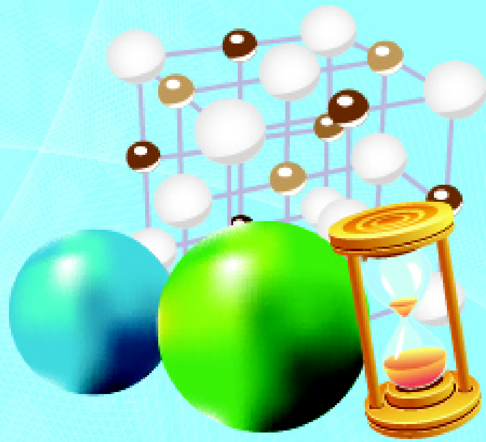
중2수학 (상)

원리이해 및 내신대비 문제 선행편

Mathmatics The discovery of dharma

최경호 지음

홈페이지(www.m1239.co.kr) 동영상 강의 및 풀이



원리탐구

중2(상) 선행 편 차례

제 1강

유리수와 단항식의 계산

Ⅰ. 유리수

1. 유리수와 소수(小數)

(1) 유리수(rational number)

a, b가 정수이고 $b \neq 0$일 때, 분수 $\frac{a}{b}$로 나타낼 수 있는 수

$$\text{유리수}\begin{cases}\text{정수}\begin{cases}\text{양의 정수}:1,\ 2,\ 3,\ \cdots\\ \quad 0\\ \text{음의 정수}:-1,\ -2,\ -3,\ \cdots\end{cases}\\ \\ \text{정수가 아닌 유리수}:\ 0.2,\ -3.8,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{2}{5},\ \cdots\end{cases}$$

(참고) '유리수(有理數)'는 영어의 'rational number'를 번역한 것이다. rational은 'ratio + nal'로서 ratio는 '비, 비율'을 의미한다. 즉, 유리수는 '두 정수의 비로 나타낼 수 있는 수'를 의미한다. 따라서 유리수는 rational number의 올바른 번역이 아니고 유비수(有比數)라고 번역하여 사용함이 옳지 않을까 생각한다.

(2) 소수

$$\begin{cases}\text{유한소수[有限小數]: 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 유한개인 소수}\\ \text{무한소수[無限小數]: 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 끝없이 계속되는 소수}\end{cases}$$

(3) 유한소수로 나타낼 수 있는 분수 판별법

① 유한소수를 분수로 고치는 방법은 소수점 아래 0이 아닌 숫자가 n개이면, 분모를 10^n으로 하고 분자는 소수점을 빼고 쓴 다음 약분을 한다. 따라서 유한소수를 기약분수로 고쳤을 때, 분모는 10^n꼴의 형태에서 $10=2\times5$이므로 분모의 소인수는 2 또는 5만 있다.

② 순환소수는 분수로 고칠 수 있다. 그러나 분수로 고칠 때 분모가 10^n꼴이 아니므로 순환소수를 기약분수로 고쳤을 때, 2 또는 5이외의 소인수가 있다.

주어진 분수를 반드시 **'기약분수'로 고친 후,** 분모를 '소인수 분해'한다.

$$\begin{cases}\text{분모의 소인수가 2, 5뿐이면} \Rightarrow \text{유한소수}\\ \text{분모의 소인수가 2, 5이외의 수가 있으면} \Rightarrow \text{순환소수}\end{cases}$$

2. 유리수와 순환소수

(1) 순환소수와 순환마디

무한소수 중에서 $0.333\cdots$, $0.212121\cdots$ 과 같이 소수점 아래의 어떤 자리부터 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이 되는 무한소수를 **순환소수**라고 하며, 이 때 되풀이되는 한 부분을 **순환마디**라고 한다.
즉, $0.444\cdots$ 의 순환마디는 4 , $0.8333\cdots$ 의 순환마디는 3 , $1.2424\cdots$ 의 순환마디는 24 이다.

(2) 순환소수의 표현

순환마디의 양 끝의 숫자위에 점(순환점)을 찍어 나타내면 된다.
예를 들면, $0.333\cdots = 0.\dot{3}$, $0.2323\cdots = 0.\dot{2}\dot{3}$, $0.145145\cdots = 0.\dot{1}4\dot{5}$ 와 같이 나타내면 된다.

(3) 순환소수를 분수로 나타내는 방법

(예1) $0.333\cdots$ 을 x 라고 하면 $x = 0.333\cdots$ …①

①의 양변에 10 을 곱하면 $10x = 3.333\cdots$ …②

(② − ①)을 하면 $9x = 3$ 이 되고, $x = \frac{1}{3}$ 이 된다.

(예2) $0.7\dot{3}$을 x 라 놓으면, $x = 0.7333\cdots$
양변에 $10, 100, 1000\cdots$을 곱하여 소수 첫째자리부터 똑같이 순환마디가 시작되는 두 식을 얻는다. (∵ 이렇게 해서 차를 구하면 분수가 소수점이 들어있지 않은 분수로 표현되어 계산이 편리하다.)

$10x = 7.333\cdots$ …③
$100x = 73.333\cdots$ …④

④−③을 하면, $90x = 73-7$ ∴ $x = \frac{73-7}{90} = \frac{66}{90} = \frac{11}{15}$

(참고) 예제와 같은 풀이를 통하여 순환소수를 분수로 고치는 방법을 다음과 같이 정리할 수 있다.

(ⅰ) 순순환소수를 분수로 고치는 방법

① $0.aaa\cdots = 0.\dot{a} = \frac{a}{9}$ ② $0.abab\cdots = 0.\dot{a}\dot{b} = \frac{ab}{99}$

(ⅱ) 혼순환소수를 분수로 고치는 방법

① $0.abcbc\cdots = 0.a\dot{b}\dot{c} = \frac{abc-a}{990}$ ② $a.bcdecde\cdots = a.b\dot{c}d\dot{e} = a\frac{bcde-b}{9990}$ (또는 $\frac{abcde-ab}{9990}$)

(4) 소수의 분류

- 소수
  - 유한소수 — 유리수
  - 무한소수
    - 순환소수 — 유리수
    - 순환하지 않는 무한소수 ⇨ 무리수

① 유한소수와 순환소수는 모두 유리수이다.
② 유리수는 유한소수와 순환소수로 나타낼 수 있다.

1 선행예제

원리탐구

다음 분수를 소수로 나타낼 때, 유한소수로 나타내어지는 것을 모두 찾으면?

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{6}{2^3\times3^3\times5^2}$ ③ $\frac{105}{42}$ ④ $\frac{3^2}{2\times6^2}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

풀이 답: ③, ④

기약분수로 고쳤을 때, 분모의 소인수가 2와 5뿐이면 유한소수로 나타 낼 수 있다.

③ $\frac{105}{42} = \frac{3\times5\times7}{2\times3\times7} = \frac{5}{2}$ ④ $\frac{3^2}{2\times6^2} = \frac{3^2}{2^3\times3^2} = \frac{1}{2^3}$

유제 1

다음 중에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것은?

① $\frac{5}{2^2\times3}$ ② $\frac{57}{2^2\times3\times5}$ ③ $\frac{24}{3^2\times5^2}$ ④ $\frac{24}{2^3\times3^2\times5}$ ⑤ $\frac{35}{2^2\times5^3\times7^2}$

2 선행예제

분수 $\dfrac{21}{2^3\times5\times a}$을 순환소수로만 나타낼 수 있도록 하는 20이하의 자연수 a의 개수를 구하여라.

풀이 답: 6개

순환소수가 되려면 a에 2, 5를 제외한 소인수가 있어야 한다. 분자에 $21=3\times7$이 있으므로 3과 7의 인수 1개가 들어있는 3, 6, 12, 15 / 7, 14도 제외한다. 그러므로 9, 11, 13, 17, 18, 19의 6개다.

유제 2

분수 $\dfrac{7^2}{2^3\times5\times7\times x}$을 순환소수로 나타낼 수 있는 20이하의 자연수 x의 개수를 구하여라.

3 선행예제

분수 $\dfrac{7}{25}$을 유한소수로 나타내기 위하여 $\dfrac{7}{25}=\dfrac{a}{10^n}$로 고쳤다. 이 때 $a+n$의 최솟값을 구하여라.(단, a, n은 자연수이다.)

풀이 답: 30

$10=2\times5$이므로 10^n을 만들려면 소인수분해하여 2와 5의 곱의 수가 같게 분모 분자에 곱한다.

$\dfrac{7}{25}=\dfrac{7\times2\times2}{5\times5\times2\times2}=\dfrac{28}{100}=\dfrac{28}{10^2}$

따라서 $a=28$, $b=2$이므로 $a+n=30$이다.

유제 3

$\dfrac{x}{90}$를 약분하면 $\dfrac{3}{y}$이 되고 이것을 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 이 때 $x-y$의 값을 구하여라.(단, x, y는 자연수, $20< x< 30$)

4 선행예제 원리탐구

순환소수 $1.101101101\cdots$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 순환마디를 구하여라.

(2) 순환마디 위에 점을 찍어 간단히 나타내어라.

(3) 주어진 순환소수를 x 로 놓고 계산하여 분수로 나타내어라.

풀이 답: (1) 101 (2) $1.\dot{1}0\dot{1}$ (3) $\frac{1100}{999}$

(1) 101이 계속되므로 순환마디는 101이다.

(2) 순환마디가 3개 이상일 때는 처음과 마지막 수 위에 점을 찍는다. 따라서 $1.\dot{1}0\dot{1}$이다.

(3) $x = 1.101101101\cdots$ ⋯ ①, $1000x = 1101.101101\cdots$ ⋯ ② 라 하자.

②-①을 하면 $1000x - x = 1101 - 1$, $999x = 1100$, $x = \frac{1100}{999}$이다.

유제 4

순환소수 $0.5\dot{6}\dot{7}$을 x라 할 때, x를 계산하여 분수로 나타내어라.

5 선행예제 원리탐구

다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

① 모든 순환소수는 유리수이다.

② 유한소수로 나타낼 수 없는 분수는 반드시 순환소수로 나타낼 수 있다.

③ 순환소수 중에는 유리수가 아닌 것도 있다.

④ 유리수는 모두 유한소수로 나타낼 수 있다.

⑤ 모든 소수는 분수로 나타낼 수 있다.

⑥ 모든 순환소수는 무한소수이다.

⑦ 모든 순환소수는 분수로 나타낼 수 있다.

⑧ 분모의 소인수가 2나 5뿐인 유리수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

풀이 답: ①, ②, ⑦, ⑧

소수를 분류하면 다음과 같다.

- 소수
  - 유한소수 ─ 유리수
  - 무한소수
    - 순환소수 ─ 유리수
    - 순환하지 않는 무한소수 ⇨ 무리

③ 순환소수는 분수로 고칠 수 있으므로 모두 유리수이다.

④ 유리수는 유한소수와 순환소수로 나타낼 수 있으며 예를 들어 $\frac{1}{3}$은 순환소수이다.

⑤ 순환하지 않는 무한소수는 분수로 나타낼 수 없다.

⑥ 순환마디가 9이면 유한소수로 고칠 수 있다. $0.1\dot{9} = 0.2$

유제 5

다음 중 옳은 것을 모두 고르면?(2개)

① 모든 무한 소수는 분수로 나타낼 수 있다.

② 무한 소수는 모두 순환 소수이다.

③ 모든 순환 소수는 유리수이다.

④ 분모의 소인수가 3과 5뿐인 분수는 순환 소수로만 나타낼 수 있다.

⑤ 정수가 아닌 유리수는 유한 소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.

Ⅱ. 단항식의 계산

1. 지수법칙

같은 수를 여러 번 곱하는 것을 **거듭제곱**이라 하며, 2를 3번 곱하는 것을 2위에 작은 수로 3을 쓴다. 즉, $2\times2\times2=2^3$ 이라고 약속하고, 2를 **밑** 3을 **지수**라고 한다.

위와 같은 거듭제곱에 관한 숫자의 계산 원리는 문자에도 똑같이 적용된다.

$a\neq0$ 이고, m, n 은 자연수일 때, 다음 지수법칙이 성립한다.

(1) 지수법칙(1): 거듭제곱의 곱셈

$$a^m\times a^n=a^{m+n},\quad a^m\times a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m\text{개}}\times\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{개}}=a^{m+n}$$

지수의 합

$$a^3\times a^2=a^{3+2}$$

(2) 지수법칙(2): 거듭제곱의 거듭제곱

$$(a^m)^n=a^{mn},\quad (a^m)^n=\underbrace{a^m\times a^m\times\cdots\times a^m}_{n\text{개}}=a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{개}}}=a^{mn}$$

지수의 곱

$$(a^3)^2=a^{3\times2}$$

(3) 지수법칙(3): 거듭제곱의 나눗셈

$$a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n} & (m>n)\\ 1 & (m=n)\\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n)\end{cases},\quad a^m\div a^n=\frac{\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{m\text{개}}}{\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{개}}}=\begin{cases}a^{m-n} & (m>n)\\ 1 & (m=n)\\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n)\end{cases}$$

(4) 지수법칙(4): 지수의 분배

① $(ab)^n=a^nb^n$, $(ab)^n=\underbrace{ab\times ab\times\cdots\times ab}_{n\text{개}}=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{개}}\times\underbrace{b\times b\times\cdots\times b}_{n\text{개}}=a^nb^n$

② $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$(단, $b\neq0$) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\overbrace{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}\times\cdots\dfrac{a}{b}}^{n\text{개}}=\dfrac{\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{개}}}{\underbrace{b\times b\times\cdots\times b}_{n\text{개}}}=\dfrac{a^n}{b^n}$

[덧셈과 곱셈간의 관계에 관한 원리와 거듭제곱에 관한 원리의 구별]

> 덧셈과 곱셈간의 관계에 관한 원리와 거듭제곱에 관한 원리를 혼동하지 말고 둘을 정확하게 구별해야 한다. 예를 들어 $2+2+2=3\times2$ 이고, $2\times2\times2=2^3$ 임을 분명히 구별해야 한다.
> 문자에서도 $a+a+a=3a$ 과 $a\times a\times a=a^3$ 을 또한 구별해야 한다.
> a를 3번 더한 것을 $3\times a=3a$ 라고 약속하고, a를 3번 곱한 것을 a^3이라고 약속함을 구별하는 것이 계산의 매우 중요한 기본 원리의 이해이며 문자나 숫자를 계산함에 흔히 많이 틀리는 부분이기도 하다.

2. 단항식의 곱셈과 나눗셈

(1) 곱셈

① 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 곱하여 계산한다.

② 같은 문자끼리의 곱셈은 지수법칙을 이용하여 간단히 한다.

③ 부호는 (-)가 홀수 개이면 (-), 짝수 개이면 (+)이다.

(예1) $2x^2y^3\times3x^4y^5=\underbrace{(2\times3)}_{\text{계수끼리}}\times\underbrace{(x^2\times x^4)\times(y^3\times y^5)}_{\text{같은문자끼리}}=6x^6y^8$

(예2) $\dfrac{2}{5}a\times10=\dfrac{2}{5}\times a\times10=\dfrac{2}{5}\times10\times a=4a$

(2) 나눗셈

① 나눗셈은 역수의 곱셈 또는 분수로 바꾼다.

② 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

③ 같은 문자끼리의 나눗셈은 지수법칙을 이용한다.

$$\boxed{A\div B=A\times\frac{1}{B}=\frac{A}{B}}$$

(예1) $2a^3\div3a=2\times a^3\times\dfrac{1}{3\times a}=2\times\dfrac{1}{3}\times a^3\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{3}a^2$

(예2) $3x^3y^4\div\dfrac{3}{5}x^2y=3x^3y^4\times\dfrac{5}{3x^2y}=5xy^3$

(3) 단항식의 곱셈과 나눗셈의 혼합계산 순서

① 괄호가 있으면 먼저 지수법칙을 이용하여 괄호를 푼다.

② 나눗셈은 역수의 곱셈 또는 분수로 바꾼다.

③ 부호를 결정한다.

④ 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

$$\boxed{A\times B\div C=A\times B\times\frac{1}{C}=\frac{AB}{C},\quad A\div B\times C=A\times\frac{1}{B}\times C=\frac{AC}{B}}$$

(예) $(x^2y)^3\div xy^2\times2x^2=x^6y^3\div xy^2\times2x^2=\dfrac{x^6y^3}{xy^2}\times2x^2=x^5y\times2x^2=2x^7y$

6 선행예제

원리탐구

다음 계산을 하여라.

(1) 다음 빈 칸을 알맞게 채워라.

① $(-2)^2\times(-2)^3=(-2)^{2+\square}=(-2)^{\square}$ ② $x^2\times x^7=x^{\square+7}=x^{\square}$

③ $(10^3)^2=10^{3\times\square}=10^{\square}$ ④ $(x^4)^2=x^{4\times\square}=x^{\square}$

(2) 다음 식을 간단히 하여라.

① $x^7\times x^6$ ② $3^5\times3\times3^8$ ③ $x^4\times y^4\times x\times y^3$

④ $(x^3)^7$ ⑤ $(2^3)^3\times(2^5)^2$ ⑥ $(x^2)^5\times y^3\times(y^3)^4$

풀이 답: 풀이참조

(1) ① $(-2)^2\times(-2)^3=(-2)^{2+\boxed{3}}=(-2)^{\boxed{5}}$ ② $x^2\times x^7=x^{\boxed{2}+7}=x^{\boxed{9}}$

③ $(10^3)^2=10^{3\times\boxed{2}}=10^{\boxed{6}}$ ④ $(x^4)^2=x^{4\times\boxed{2}}=x^{\boxed{8}}$

(2) ① $x^7\times x^6=x^{13}$ ② $3^5\times3\times3^8=3^{14}$ ③ $x^4\times y^4\times x\times y^3=x^4\times x\times y^4\times y^3=x^5y^7$

④ $(x^3)^7=x^{21}$ ⑤ $(2^3)^3\times(2^5)^2=2^9\times2^{10}=2^{19}$ ⑥ $(x^2)^5\times y^3\times(y^3)^4=x^{10}\times y^3\times y^{12}=x^{10}y^{15}$

유제 6

다음 계산을 하여라.

(1) 다음 빈 칸을 알맞게 채워라.

① $(-3)^4\times(-3)^3=(-3)^{4+\square}=(-3)^{\square}$ ② $a^2\times a^5=a^{\square+5}=a^{\square}$

③ $(9^2)^4=9^{2\times\square}=9^{\square}$ ④ $(a^3)^4=a^{3\times\square}=a^{\square}$

(2) 다음 식을 간단히 하여라.

① $a^4\times a^2$ ② $2^3\times2\times2^7$ ③ $a^4\times b^2\times a\times b^5$

④ $a\times b^6\times a^3\times b^4\times a^2$ ⑤ $(b^3)^4$ ⑥ $(a^2)^3\times(b^4)^2\times a^5$

7 선행예제

원리탐구

다음 계산을 하여라.

(1) 다음 빈 칸을 알맞게 채워라.

① $y^5\div y^3=y^{\square-3}=y^{\square}$ ② $x^3\div x^3=\square$

③ $y^8\div y^{12}=\dfrac{1}{y^{12-\square}}=\dfrac{1}{y^{\square}}$ ④ $(2x)^4=2^{\square}x^{\square}=\square x^{\square}$

⑤ $\left(\dfrac{y}{4}\right)^3=\dfrac{y^{\square}}{4^{\square}}=\dfrac{y^{\square}}{\square}$ ⑥ $\left(-\dfrac{x}{3}\right)^3=\dfrac{x^{\square}}{(-3)^{\square}}=\dfrac{x^{\square}}{\square}=-\dfrac{x^{\square}}{\square}$

(2) 다음 식을 간단히 하여라.

① $x^5\div x^2$ ② $7^9\div7^9$ ③ $x^2\div x^3$

④ $(x^5y)^2$ ⑤ $(3y^3)^2$ ⑥ $\left(-\dfrac{y^2}{x^4}\right)^6$

풀이 답: 풀이참조

(1) ① $y^5\div y^3=y^{\boxed{5}-3}=y^{\boxed{2}}$ ② $x^3\div x^3=\boxed{1}$ ③ $y^8\div y^{12}=\dfrac{1}{y^{12-\boxed{8}}}=\dfrac{1}{y^{\boxed{4}}}$

④ $(2x)^4=2^{\boxed{4}}x^{\boxed{4}}=\boxed{16}x^{\boxed{4}}$ ⑤ $\left(\dfrac{y}{4}\right)^3=\dfrac{y^{\boxed{3}}}{4^{\boxed{3}}}=\dfrac{y^{\boxed{3}}}{\boxed{64}}$ ⑥ $\left(-\dfrac{x}{3}\right)^3=\dfrac{x^{\boxed{3}}}{(-3)^{\boxed{3}}}=\dfrac{x^{\boxed{3}}}{\boxed{-27}}=-\dfrac{x^{\boxed{3}}}{\boxed{27}}$

(2) ① $x^5\div x^2=x^3$ ② $7^9\div7^9=1$ ③ $x^2\div x^3=\dfrac{1}{x}$ ④ $(x^5y)^2=x^{10}y^2$ ⑤ $(3y^3)^2=9y^6$

⑥ $\left(-\dfrac{y^2}{x^4}\right)^6=\dfrac{y^{12}}{x^{24}}$

유제 7

다음 계산을 하여라.

(1) 다음 빈 칸을 알맞게 채워라.

① $b^6\div b^2=b^{\square-2}=b^{\square}$ ② $a^2\div a^2=\square$ ③ $b^3\div b^{12}=\dfrac{1}{b^{12-\square}}=\dfrac{1}{b^{\square}}$

④ $(2a)^3=2^{\square}a^{\square}=\square a^{\square}$ ⑤ $\left(\dfrac{b}{3}\right)^3=\dfrac{b^{\square}}{3^{\square}}=\dfrac{b^{\square}}{\square}$ ⑥ $\left(-\dfrac{a}{2}\right)^3=\dfrac{a^{\square}}{(-2)^{\square}}=\dfrac{a^{\square}}{\square}=-\dfrac{a^{\square}}{\square}$

(2) 다음 식을 간단히 하여라.

① $b^6\div b^2$ ② $a^4\div a^4$ ③ $4^2\div4^5$

④ $(-a^2b^3)^3$ ⑤ $(2a^7)^4$ ⑥ $\left(\dfrac{2x^3}{5y^2}\right)^3$

8 선행예제

원리탐구

다음 계산을 하여라.

(1) 다음 빈칸을 알맞게 채워라.

① $4x^3\times5x^4=4\times5\times x^3\times\square=20x^{\square}$ ② $2x\times\frac{3}{4}x^3=2\times\frac{\square}{\square}\times x\times x^3=\frac{\square}{\square}x^{\square}$

③ $12x^6\div3x^5=\frac{12x^6}{\square}=\square$ ④ $10x^2\div\frac{4}{5}x^8=10x^2\times\frac{5}{4\square}=\frac{\square}{\square}$

(2) 다음 식을 간단히 하여라.

① $(-6x)\times\frac{1}{18}xy$ ② $2x\times(3y)^2$ ③ $(-24x^4y^3)\div7x^2y$

④ $12x^2y^4\div\frac{3}{4}xy$ ⑤ $12x^6y^4\times(-y)\div(-2xy)^2$ ⑥ $2y\div(-4xy^2)\times(-10xy^2)$

풀이 답: 풀이참조

(1) ① $4x^3\times5x^4=4\times5\times x^3\times\boxed{x^4}=20x^{\boxed{7}}$ ② $2x\times\frac{3}{4}x^3=2\times\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\times x\times x^3=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}x^{\boxed{4}}$

③ $12x^6\div3x^5=\frac{12x^6}{\boxed{3x^5}}=\boxed{4x}$ ④ $10x^2\div\frac{4}{5}x^8=10x^2\times\frac{5}{4\boxed{x^8}}=\frac{\boxed{25}}{\boxed{2x^6}}$

(2) ① $(-6x)\times\frac{1}{18}xy=(-6)\times\frac{1}{18}\times x\times xy=-\frac{1}{3}x^2y$ ② $2x\times(3y)^2=2\times3^2\times x\times y^2=18xy^2$

③ $(-24x^4y^3)\div7x^2y=-\frac{24x^4y^3}{7x^2y}=-\frac{24}{7}x^2y^2$ ④ $12x^2y^4\div\frac{3}{4}xy=12x^2y^4\times\frac{4}{3xy}=16xy^3$

⑤ $12x^6y^4\times(-y)\div(-2xy)^2=\frac{12x^6y^4\times(-y)}{(-2xy)^2}=\frac{-12x^6y^5}{4x^2y^2}=-3x^4y^3$

⑥ $2y\div(-4xy^2)\times(-10xy^2)=\frac{2y\times(-10xy^2)}{-4xy^2}=5y$

유제 8

다음 계산을 하여라.

(1) 다음 빈칸을 알맞게 채워라.

① $4a^2\times3a^4=4\times3\times a^2\times\square=12a^{\square}$ ② $2a^4\times\frac{3}{8}a^3=2\times\frac{\square}{\square}\times a^4\times a^3=\frac{\square}{\square}a^{\square}$

③ $15a^8\div3a^4=\frac{15a^8}{\square}=\square$ ④ $8a^2\div\frac{2}{5}a^6=8a^2\times\frac{5}{2\square}=\frac{\square}{\square}$

(2) 다음 식을 간단히 하여라.

① $\frac{1}{2}a^3b^4\times(-6ab^2)$ ② $(-3ab)^2\times5a^2b^3$ ③ $2a^6b\div5a^2b^3$

④ $9a^4b^2\div\frac{3}{2}ab$ ⑤ $7a^2b\div(-3ab^2)\times6b$ ⑥ $3a^2b\times(-8b)\div12ab$

종합문제

1. 다음 분수 중에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것은?

① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{13}{65}$ ③ $\frac{56}{3^4\times7^2}$ ④ $\frac{8}{2^2\times5\times3}$ ⑤ $\frac{2}{3\times5^2}$

2. 분수 $\frac{39}{2^3\times5^2\times a}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 된다고 할 때, 다음 중에서 a의 값으로 적당한 것은?

① 27 ② 33 ③ 52 ④ 117 ⑤ 169

3. $\frac{11}{180}\times A$가 유한소수로 나타내어질 때, A의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

4. 순환소수 $x=1.353535\cdots$ 를 분수로 나타내는 계산에서 다음 중 그 결과가 정수가 되는 것은?

① $1000x-100x$　　② $10000x-10x$　　③ $100x-x$
④ $100x-10x$　　⑤ $1000x-x$

5. 순환소수 $2.3\dot{9}$ 를 분수로 고치면 $\dfrac{a}{90}$ 이고, 이 분수를 기약분수로 고치면 $\dfrac{12}{b}$ 일 때, $a-b$ 의 값은?

① 205　　② 210　　③ 211　　④ 216　　⑤ 221

6. 어떤 기약분수를 소수로 나타낼 때, 분모를 잘못 보아 $1.\dot{7}$ 이 되고, 분자를 잘못 보아 $1.\dot{1}\dot{7}$ 이 되었다. 처음의 분수를 소수로 옳게 나타내어라.

7. 분수 $\dfrac{24}{525}$ 와 $\dfrac{36}{264}$ 에 어떤 수 x를 곱하여 두 수 모두 유한소수가 되게 하려고 한다. x가 될 수 있는 최소의 자연수를 구하여라.

8. $\dfrac{1}{4}$ 과 $\dfrac{5}{6}$ 사이에 분모가 24 이고 분자가 자연수인 분수로서 유한소수가 되는 분수의 개수를 구하여라.

9. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① 모든 무한소수는 유리수이다.
② 0 이 아닌 유리수는 모두 유한소수이다.
③ 순환소수 중에는 분수로 나타낼 수 없는 것이 있다.
④ 분모의 소인수가 2 뿐인 분수는 유한소수로 나타낼 수 없다.
⑤ 분모를 10 의 거듭제곱 꼴로 고칠 수 있는 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

10. 유리수 $\dfrac{7}{5^2 \times a}$ 을 소수로 나타내면 유한소수가 된다고 한다. 10 미만의 자연수 중에서 a 의 값으로 적당한 수들을 모두 더하여라.(단, $a \neq 1$)

11. $\dfrac{a}{110}$ 를 약분하면 $\dfrac{1}{b}$ 이 되고, 이것을 소수로 나타내면 유한소수가 될 때, 정수 $a+b$ 의 값을 구하여라.(단, $10 < a < 20$)

12. 분수 $\dfrac{16}{7}$ 을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 50 번째 자리의 숫자는?

(단, $\dfrac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ 이다.

① 2 ② 8 ③ 5 ④ 7 ⑤ 1

13. $\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{1000}+\cdots\right)$ 을 순환소수로 나타내어라.

14. $4^3+4^3+4^3+4^3=4^a$, $4^3 \times 4^3 \times 4^3 \times 4^3 = 4^b$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

15. $3^2 = A$ 라 할 때, $3^4 - 18$ 를 A 에 관한 식으로 나타내어라.

16. $2^2 = x$ 라 할 때, 8^6 를 x 를 사용하여 나타내어라.

17. 다음 〈보기〉중에서 옳은 것만 고른 것은?

㉠ $(x^9)^2 \div (x^2)^3 = x^3$	㉡ $x^5 \times x^5 \times x^2 = x^{50}$	㉢ $x^{10} \div x^5 \div x^5 = 0$
㉣ $2^3 \div 2^x = \frac{1}{8}$ 일 때, $x = 6$	㉤ $2^{2+2} = a \times 2^2$ 일 때, $a = 4$	

① ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉢, ㉣, ㉤
④ ㉣, ㉤ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

18. $(4x^2y)^2 \div (-2y)^2 \div 4x^3y^2$ 을 간단히 하면?

① $\frac{x}{y^2}$ ② $\frac{x^2}{y}$ ③ $-\frac{x}{y^2}$ ④ $-\frac{x^2}{y}$ ⑤ $\frac{x^2}{y^2}$

19. $6xy^3 \div 3x^3y \times \square = 2y^3$ 에서 □ 안에 알맞은 식을 구하여라.

20. $\left(-\frac{2x^3y^b}{a}\right)^3 = \frac{cx^dy^{12}}{27}$ (단, $a > 0$)일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하면?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 16

21. $(x^3 \div x^5)^2 \times x^{\square} = \frac{1}{x}$ 에서 □ 안에 알맞은 수를 구하여라.

생활과 수학

1. 나노(NANO)의 세계

초기에 몇몇 과학자들에게만 알려졌던 '나노'는 이제 가전제품에서 생활용품에 이르기까지 우리 주변에서 흔히 볼 수 있는 제품에 이용될 만큼 일반화되었다.

아주 미세한 단위인 나노(NANO)는 '난쟁이'를 뜻하는 고대 그리스어 나노스(nanos)에서 유래되었다.

1미터의 $\frac{1}{1000}$이 1밀리미터(mm),

1미터의 $\frac{1}{1000000}$이 1마이크로미터(μm)

1미터의 $\frac{1}{1000000000}$이 1나노미터(nm)

이며, 1나노미터(nm)는 사람 머리카락 굵기의 $\frac{1}{100000}$의 크기로, 가장 작은 크기의 원소인 수소를 10개 정도 나란히 늘어놓았을 때의 크기와 같은 초미세 단위이다.

밀리미터 단위의 크기는 우리가 눈으로 볼 수 있는 크기이고, 마이크로미터 단위의 크기는 눈으로는 볼 수 없지만 현미경으로 관찰이 가능한 크기이다. 그러나 나노 단위의 크기는 현미경으로도 자세히 보기 어려운 새로운 영역이다.

나노는 아주 작은 세계로 우리와 직접적인 관련이 없는 것처럼 보이지만 나노입자는 우리 몸 안에서 더 큰 물질에 비해 세포나 몸속 기관을 자유롭게 뚫고 지나가면서 *DNA*를 부수고 세포 자살을 유도하기도 한다.

또한 어떤 물질이 나노미터 단위의 입자가 되면 원자나 분자를 자유자재로 조작해 그 물질의 고유한 성질과는 다른 특이한 성질을 가지는 초미세 단위의 물질을 만들기도 한다.

나노 기술은 21세기 과학에서 전성기를 맞는 분야이지만 동전의 양면처럼 여러 모습을 품고 있을 수 있으므로 유해성에 대한 재고가 반드시 필요한 중요한 분야이다.

(출전: 중학교 수학2, 지학사)

읽을거리

1. 소수(小數)의 발견

지금부터 1500 년 전, 이미 인도에서는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 란 숫자와 0 의 기호 그리고 십마다 한 자리씩 올라가는 10 진법을 발견했었다. 하지만 1 보다 작으나 0 보다는 큰 수, 즉 소수(小數)를 나타내기 위한 간단한 기호법을 발견해 내지는 못했다.

아라비아나 유럽의 수학자들이 천 수 백년이라는 긴 세월에 걸쳐 많은 고생을 하면서 귀찮은 방법으로 소수를 나타내고 있었다.

누가 이 소수와 기호법을 발명했는가를 말하기 앞서 결코 이것은 혼자의 힘이나 우연히 발명된 것이 아님을 미리 말해 두고 싶다. 소수를 확실히 의식하며 오늘날과 같은 기호를 사용하여 나타낸 것은 문예 부흥 시대부터이다. 맨 처음, 소수에 관한 법칙을 세운 사람은 벨기에의 시몬 스테빈(*Simon Stevin*;1546 – 1620)이었다. 그러나 스테빈은 소수를 알고 그것을 계산에 사용하기는 했지만 적당한 기호법을 모르고 있었다.

예를 들어 6.345 를 나타내는데 6⓪3①4②5③ 이라고 썼다.

즉, 소수점을 ⓪ 으로, 소수점 이하 한자리를 ①, 두 자리를 ②, 3 자리를 ③ 으로 나타냈던 것이다. 이 방법은 번거로운 방법이긴 했으나, 하여간 최초로 소수를 나타낸 것임에는 틀림이 없다. 그 후 1631 년에 윌리엄 오트레드(*William Oughtred*)도 소수를 나타내고 있었다. 예를 들어 8.325 를 81325 라고 했다. 이것은 앞서의 스테빈의 기호법에 비하면 훨씬 간단한 것이었다.

스테빈의 제자 지라드(*Alber Girard* ; 1595 – 1632)는 1629 년에 단 한번만 오늘날과 같은 소수점을 썼는데 진심으로 소수점의 뜻을 알고 있었는지의 여부는 분명치 않다.

소수점을 분명히 의식하고 처음으로 소수를 쓴 사람은 존 윌리스(*John Willis* ; 1616 – 1703)이다. 존 윌리스보다도 전 시대의 사람으로서 영국의 귀족 존 네이피어는 1619 년에 한두 번 오늘날의 소수점을 사용했지만 이것 또한 분명히 그 뜻을 의식하고 있었는지 여부는 분명치 않으므로 역시 존 윌리스가 소수를 정확히 의식하고 사용한 최초의 사람이라고 할 수 있다.

어떤 사실을 막연하게 알면서 쓰는 사람이 있지만 그 보다는 늦더라도 확실하게 그 뜻을 알고 사용하는 사람이 실력 있는 사람일 것이다. 이런 이유에서 윌리스를 오늘날 우리가 말하는 소수 발명자라고 하는 것이다. 오늘날 우리가 말하는 소수 기호가 확실하게 일반 사람들에게 알려지게 되었으므로 1 이하의 수를 나타내는데 정확하고 편리하게 되었다. 문예 부흥 시대의 수학에서 가장 큰 그리고 놀라울만한 발명은 바로 이 소수의 발명이었다.