100 문제를 푸는 것보다 문제를 푸는 1가지 원리를 가르칩니다!

원리탐구 중등수학

중1수학(상)

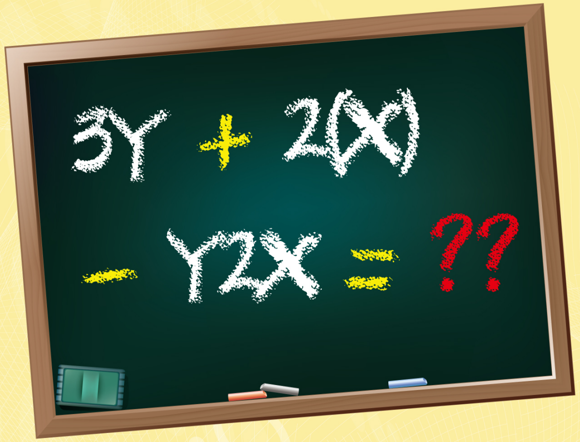
원리이해 및 내신대비 문제 **선행편**

Mathematics the Discovery of Dharma

최경호 지음

홈페이지(www.m1239.com) 동영상 강의 및 풀이

어려운 문제 QR코드 첨부



원리탐구

중1(상) 선행 편 차례

	생활과 수학	읽을거리
제 1강	1. 생존을 위한 매미의 선택, 소수!	1. 사각형 속에 숨은 합성수와 소수, 제곱수
제 2강	1. 태양계의 행성들의 주기	1. 진법 가운데 가장 편리한 진법은 무엇일까?
제 3강	1. 남 · 북한 수학용어 비교(1)	1. 새해를 가장 먼저 맞이하는 나라는?
제 4강	1. 남 · 북한 수학용어 비교(2)	1. 수학에서 기호 사용의 의의
제 5강	1. 친구의 생일과 나이를 알아맞히기	1. X파일과 X세대와 미지수 x
제 6강	1. 물물 교환을 쉽게 하는 방법	1. 마방진… 못다 한 이야기
제 7강	1. 돈의 미래 가치	1. 아파트에서 가장 시끄러운 층을 알아내는 함수
제 8강	1. 해양 연구원 이야기	1. 뼈의 길이로 사람의 키를 추측할 수 있을까?

중상위권 학생들에게
원리탐구로 수학을 재미있고 정확·신속하게 풀게하여
즐기며 꿈에 도전하자!

제 1강

소인수 분해와 약수

골드바흐의 추측

골드바흐의 추측은 18 세기 러시아의 수학자 골드바흐(Goldbach C.: 1690~1764)에 의하여 제기된 문제로 '2 보다 큰 모든 짝수는 두 개의 소수의 합으로 나타낼 수 있다.' 이다.

예를 들면 $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$ 이다

이 문제는 보기에는 쉬워도 아직까지 해결하지 못한 수학에서의 난제 중 하나이다.

Q: 다음 수를 두 개의 소수의 합으로 나타내어 골드바흐의 추측을 확인하여라.

(1) 10 (2) 18 (3) 32

1. 소수의 뜻

(1) 소수와 합성수

자연수는 약수의 개수에 의해 소수, 합성수, 1로 분류할 수 있다.

① **소수**(素; 바탕, 數; 수/$prime\ number$): 약수가 2개인 수 또는 1과 자기 자신의 수의 곱만으로 나누어지는 수를 말한다.

(0.1, 0.2, 0.3, ⋯과 같은 소수(小; 작다, 數; 수/decimal)와 구별)

② **합성수**: 약수의 개수가 3개이상 인 수 또는 1과 자기 자신 이외의 수로도 나누어지는 수를 말한다. 즉, 1과 소수가 아닌 자연수를 말한다.

2. 소수 찾기

(1) 에라토스테네스의 체

1은 소수도 합성수도 아니므로 제외한다. 소수 자신을 제외한 그 소수의 배수는 모두 합성수이므로 각 소수의 배수를 지우면 소수를 쉽게 찾을 수 있다. 처음 짝수 2는 소수이다. 그러나 그 이외의 모든 짝수는 2의 배수이므로 모두 사선을 그어 지운다.

3번째 수인 3은 그보다 작은 약수(1은 제외)가 없으므로 소수이다.

3은 남겨 놓고 그 밖의 3의 배수들은 모두 지운다.

이와 같은 방법으로 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \cdots$ 등의 소수를 구하고, 그것들의 배수를 지워 나갈 때 남은 수가 소수이다. 이와 같은 방법은 일종의 노동으로 143과 같이 ***큰 수가 소수 인지를 알아보는 경우에 시간이 많이 걸리는 단점***이 있다.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

위의 표와 같이 소수를 찾는 방법은 그리스의 수학자 에라토스테네스($Eratosthenes$)가 발견하였다. 이 방법은 마치 체를 이용하여 소수를 걸러내는 것과 비슷하여 '에라토스테네스의 체'라고 한다.

(2) 제곱수 이용하기

합성수는 최소한 1과 자기 자신 이외의 두개의 수 이상의 곱으로 나타낼 수 있다. 즉, $6=2\times3$, $12=2\times6=3\times4=2\times2\times3$과 같이 곱으로 나타 낼 수 있다.

따라서 제곱수(똑같은 두수의 곱으로 이루어진 수)

$4=2\times2=2^2$, $9=3\times3=3^2$, $16=4\times4=4^2$, $25=5\times5=5^2$, $36=6\times6=6^2$, $49=7\times7=7^2$, $64=8\times8=8^2$, $81=9\times9=9^2$, $100=10\times10=10^2$, $121=11\times11=11^2$, $144=12\times12=12^2$, $\cdots$

의 두개의 같은 수의 곱 중에서 하나보다 작은 소수로 나누어떨어지는가를 본다. 예를 들어 19은 $25=5\times5$보다 작으므로 5보다 작은 소수 2, 3로 나누어떨어지지 않으므로 소수이다. 91는 $100=10\times10$보다 작으므로 10보다 작은 소수 2, 3, 5, 7로 나누어 본다.

$91=7\times13$이므로 합성수이다.

위의 두 가지 방법 중에서 제곱수 이용하기를 활용하면 큰 수가 소수인지 아닌지를 구별하는데 매우 유용하게 쓰인다.

3. 거듭제곱

수를 여러 번 곱할 때, $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$와 같이 수를 여러 번 곱한 식은 너무 길어서 공간을 많이 차지하고, 이것이 어떤 수를 나타내는 지 한눈에 알아보기도 힘들다. 따라서 이것을 곱하는 수와 곱한 횟수를 이용하여 간단히 나타낸 것을 거듭제곱이라 한다.

$$5\times5\times5\times5=\underset{\uparrow\,밑}{5}^{4\ \leftarrow 지수}$$

(예) 2^3, 3^2, 5^4, a^2, x^5, $\cdots$

$2\times2=2^2$, $2\times2\times2=2^3$, $2\times2\times2\times2=2^4$, ⋯으로 나타내고, 각각 '2의 제곱', '2의 세제곱', '2의 네제곱' ⋯이라고 읽는다.

(1) **밑** : 거듭제곱에서 곱해진 수나 문자

(2) **지수** : 거듭제곱에서 곱해진 개수를 나타내는 수

1 선행예제

원리탐구

다음은 제곱수를 이용하여 소수와 합성수로 구별하려고 한다. 물음에 구하여라.

(1) □는 같은 수이다. □에 알맞은 수를 넣고, 어떤 소수로 나누어 보아야 소수와 합성수를 구별할 수 있으며, 소수와 합성수로 구별하여보아라.

① $89 < 100 = \square \times \square$　　② $143 < 144 = \square \times \square$

(2) 다음 수를 제곱수를 이용하여 소수와 합성수로 구별하여보아라.

① 97　　② 133　　③ 211

풀이 답: (1) ① 소수 ② 합성수 (2) ① 소수 ② 합성수 ③ 소수

(1) ① 89은 $100 = 10 \times 10$ 보다 작으므로 10보다 작은 소수 $2, 3, 5, 7$으로 나누어보면 나누어떨어지지 않으므로 소수이다.

② 143은 $144 = 12 \times 12$ 보다 작으므로 12보다 작은 소수 $2, 3, 5, 7, 11$로 나누어 본다.
$143 = 11 \times 13$이므로 합성수이다.

(2) ① 97은 $100 = 10 \times 10$ 보다 작으므로 10보다 작은 소수 $2, 3, 5, 7$로 나누어 본다.
나누어떨어지지 않으므로 소수이다.

② 133는 $144 = 12 \times 12$보다 작으므로 12보다 작은 소수 $2, 3, 5, 7, 11$로 나누어 본다.
$133 = 7 \times 19$이므로 합성수이다.

③ 211는 $225 = 15 \times 15$ 보다 작으므로 15보다 작은 소수 $2, 3, 5, 7, 11, 13$로 나누어보면 나누어떨어지지 않으므로 소수이다.

유제 1

다음은 제곱수를 이용하여 소수와 합성수로 구별하려고 한다. 물음에 구하여라.

(1) □는 같은 수이다. □에 알맞은 수를 넣고, 어떤 소수로 나누어 보아야 소수와 합성수를 구별할 수 있으며, 소수와 합성수로 구별하여보아라.

① $33 < 36 = \square \times \square$　　② $151 < 169 = \square \times \square$

(2) 다음 수를 제곱수를 이용하여 소수와 합성수를 구별하여보아라.

① 63　　② 463

2 선행예제

원리탐구

다음을 거듭제곱으로 나타내어라.

(1) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$　　(2) $a \times a \times a \times a$

(3) $2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7$　　(4) $a \times a \times a \times a \times b \times b \times b$

(5) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$　　(6) $a \times a \times b \times b \times b \times c$

풀이 답: (1) 2^5 (2) a^4 (3) $2^2 \times 7^3$ (4) $a^4 \times b^3$ (5) $2^3 \times 3 \times 7^4$ (6) $a^2 \times b^3 \times c$

(1) 2가 5번 곱해져 있으므로 2^5이다.

(2) 문자도 마찬가지로 적용된다. 따라서 a가 4번 곱해져 있으므로 a^4이다.

(3) 2가 2번 7이 3번 곱해져 있으므로 $2^2 \times 7^3$이다.

(4) a가 4번 b이 3번 곱해져 있으므로 $a^4 \times b^3$이다.

(5) 2가 3번 3이 1번 7이 4번 곱해져 있으므로 $2^3 \times 3 \times 7^4$이다. 소인수의 곱으로 표현할 때, 작은 수에서 큰 수의 순서로 쓴다.

(6) a가 2번 b이 3번 c가 1번 곱해져 있으므로 $a^2 \times b^3 \times c$이다. 문자의 거듭제곱으로 표현 할 때, 알파벳 순서로 쓴다.

유제 2

다음을 거듭제곱으로 나타내어라.

(1) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$　　(2) $a \times a \times a \times a$

(3) $3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$　　(4) $x \times x \times y \times y \times y \times y$

(5) $2 \times 2 \times 2 \times 11 \times 11 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$　　(6) $a \times a \times c \times c \times c \times b \times b$

4. 소인수분해

(1) 소인수분해의 필요성

① 구구단으로 하기 어려운 *두 자리 수 이상의 곱셈·나눈 셈을 암산으로 정확하고 신속하게 계산*하는 데 매우 유용하다.

예, $14\times15=2\times7\times3\times5=7\times3\times2\times5=210$, $350\div14=5\times7\times2\times5\div(2\times7)=25$

② 공약수, 공배수를 통하여 *분수의 사칙계산*에 매우 유용하게 쓰인다.

예, $\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times5}=\frac{1\times5}{2\times3\times5}-\frac{1\times2}{3\times5\times2}=\frac{5-2}{2\times3\times5}=\frac{3}{2\times3\times5}=\frac{1}{10}$

$\frac{7}{15}\div\frac{14}{5}=\frac{7}{3\times5}\times\frac{5}{2\times7}=\frac{1}{6}$

③ 각종 계산의 경우 될 수 있는 한 *소인수분해를 해 놓은 다음 마지막에 곱하기나 나눗셈을 하는 순서*를 지키면 계산이 매우 정확하고 신속하게 된다.

예, $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=39$, $6x+4x+3x=39\times12$, $13x=3\times13\times12$, $x=36$

위의 문제의 경우 $39\times12=464$와 같이 계산을 하기보다는 $39\times12=3\times13\times12$와 같이 소인수분해하여 공통된 곱을 없앤 다음 계산하는 순서를 취하면 매우 편리함을 알 수 있다.

④ 기타 학년이 올라가서 *각종식의 계산*에서 매우 편리하게 쓰인다.

다년간의 수학강의를 통하여 보면 인수분해를 하기 전까지의 *수학 실력은 소인수분해 실력과 비례함*을 알 수 있었다.

(2) 소인수와 소인수분해

합성수는 소인수들만의 곱으로 나타낼 수 있다. 이를 테면 합성수 12 는

$$12=2\times2\times3=2^2\times3$$

과 같이 소인수들만의 곱으로 나타내어진다.

이와 같이 합성수를 그 수의 소인수들만의 곱으로 나타내는 것을 인수분해라고 한다. 소인수분해 한 결과는 보통 크기가 작은 소인수부터 차례로 쓴다.

소인수 분해를 할 때에는 항상 배수이론을 적용하는 습관을 가져야 한다.

(3) 소인수분해 방법

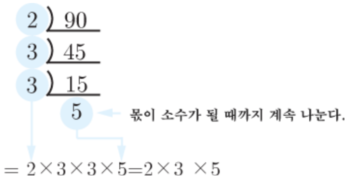
소인수분해 방법은 ① 밑으로 계속 나누어가기, ② 곱으로 쪼개기, ③ 암산의 3가지 방법이 있다. 이 3가지 중에서 *암산으로 하는 방법에 중점*을 둔다.

① 밑으로 계속 나누어가기

90을 아래로 내려가며 계속 몫이 소수가 될 때까지 나누는 방식으로 소인수로 나누는 순서는 여러 가지로 생각할 수 있으나 작은 소수부터 나누고, 작은 소수부터 소인수를 쓰는 것이 일반적이다.

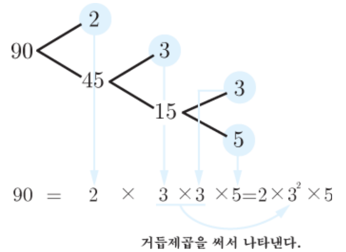
$90=2\times3\times3\times5=2\times3^2\times5$임을 알 수 있다. 이와 같이 소인수분해 한 결과는 소인수들의 곱하는 순서를 생각하지 않으면 오직 한 가지뿐이다. 그러나 꼭 소인수로 나누어야 할 필요 없이 *알 수 있는 인수로 나누어 계산과정을 줄이는 것*이 좋다.

즉 $90=9\times10=2\times3^2\times5$와 같이 암산으로 할 수 있는 부분을 활용한다.



② 곱으로 쪼개기

90을 오른쪽으로 위에는 소수 아래는 몫을 쓰면서 계속 몫이 소수가 될 때까지 나누는 방식도 여러 가지로 생각할 수 있으나 작은 소수부터 나누는 것이 일반적이다. 이 방법도 곱하는 순서를 생각하지 않으면 오직 $90=2\times3\times3\times5=2\times3^2\times5$ 한 가지뿐이다. 다음 ③의 암산으로 하는 방법이 쉽지 않을 경우에 편리한 방법이며, 암산방법의 기초가 된다. 이와 같은 방법은 $90=2\times45=2\times9\times5=2\times3^2\times5$와 같이 표를 그리지 않고 암산이 힘든 경우 되는 것까지 한 다음 암산을 하여 신속한 소인수분해가 되게 한다.



(4) 암산으로 소인수분해하기

십진법에서 $10=2\times5, 100=2^2\times5^2, 1000=2^3\times5^3,\cdots$ 과 배수판별법 및 거듭제곱을 반복학습을 하여 머릿속에서 암산으로 소인수분해하는 방법을 익힌다.

이와 같이 암산으로 소인수분해를 하면 앞의 ① 밑으로 계속 나누어가기 ② 곱으로 쪼개기 방법보다 아주 정확하고 신속한 계산을 할 수 있어 계산력 증진에 매우 효과적이다.

[암산으로 소인수분해하는 순서]

① 십진법에서 $10=2\times5, 100=2^2\times5^2, 1000=2^3\times5^3,\cdots$을 한다. 먼저 수 중에서 끝에 계속되는 0의 개수는 2×5의 개수로 소인수분해 한다.

② 나머지 인수 중에서 배수이론으로 인수를 곱으로 쪼갠다.

특히 2, 5는 끝의 한 자리 수만 보면 알 수 있으므로 먼저 활용을 하고, 3, 9의 배수는 각 자리 수의 합을 보면 되므로 다음으로 활용하면 편리하다.

③ 거듭제곱이 있는가를 확인한다. 다음을 여러 번 사용하여 습관이 되면 편리하다.

(i) $4=2\times2=2$, $8=2\times2\times2=2^3$, $16=2\times2\times2\times2=2^4$, $32=2\times2\times2\times2\times2=2^5$, $64=2\times2\times2\times2\times2\times2=2^6$, $128=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^7,\cdots$

(ii) $25=5\times5=5^2$, $125=5\times5\times5=5^3$, $625=5\times5\times5\times5=5^4,\cdots$

위의 2^n, 5^n꼴의 수를 잘 익혀두면 역으로 곱셈을 하는 경우에도 유익하게 활용된다.

(iii) $9=3\times3=3^2, 27=3\times3\times3=3^3, 81=3\times3\times3\times3=3^4$

(iv) $36=6\times6$, $49=7\times7$, $121=11\times11$, $144=12\times12$, $169=13\times13,\cdots$

위와 같이 되지 않을 경우 소수로 직접 나누어보고 곱으로 쪼개기 방식이나 밑으로 계속 나누어가기 방식을 취한다.

3 선행예제

원리탐구

다음은 수를 밑으로 계속 나누어가기 방법으로 소인수분해하고, 물음에 답하여라.

(1) $\square$에 알맞은 수를 넣고, 소인수의 곱으로 써라.

① 12

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline \square & \square \\ \hline & 3 \end{array}$$

② 450

$$\begin{array}{r|l} \square & 450 \\ \hline \square & 45 \\ \hline & 9 \end{array}$$

(2) 소인수의 곱으로 써라.

① 30 ② 45 ③ 280

풀이 답: (1) ① $2\times2\times3$ ② $2\times3^2\times5^2$ (2) ① $2\times3\times5$ ② $3\times3\times5$ ③ $2^3\times5\times7$

꼭 소인수로 나누어야 할 필요 없이 *알 수 있는 인수로 나누어 계산과정을 줄이는 것*이 좋다.

즉 $450=10\times45=10\times9\times5$와 같이 암산으로 할 수 있는 부분을 활용한다.

(1) ① $12=2\times2\times3$ ② $450=2\times3^2\times5^2$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline \boxed{2} & \boxed{6} \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \boxed{10} & 450 \\ \hline \boxed{5} & 45 \\ \hline & 9 \end{array}$$

(2) ① $30=2\times3\times5$ ② $45=3\times3\times5$ ③ $280=2^3\times5\times7$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 280 \\ \hline 7 & 28 \\ \hline & 4 \end{array}$$

유제 3

다음은 수를 밑으로 계속 나누어가기 방법으로 소인수분해하고, 물음에 답하여라.

(1) $\square$에 알맞은 수를 넣고, 소인수의 곱으로 써라.

① 8

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8 \\ \hline \square & \square \\ \hline & 2 \end{array}$$

② 540

$$\begin{array}{r|l} \square & 540 \\ \hline \square & 54 \\ \hline & 6 \end{array}$$

(2) 소인수의 곱으로 써라.

① 16 ② 25

③ 120 ④ 630

4 선행예제

원리탐구

다음은 암산으로 소인수분해하고, 물음에 답하여라.

(1) $\square$에 알맞은 수를 넣고, 소인수의 곱으로 써라.

① $90=\square\times9=\square\times\square\times\square\times3$ ② $360=\square\times36=\square\times\square\times6$

(2) 소인수의 곱으로 써라.

① 99 ② 490

풀이 답: (1) ① 10, 2, 5, 3, $2\times3^2\times5$ ② 10, 10, 6, $2^3\times3^2\times5$

(2) ① $3^2\times11$ ② $2\times5\times7^2$

[암산으로 소인수분해하는 순서]

① 십진법에서 $10=2\times5, 100=2\times2\times5\times5,\cdots$을 한다. 먼저 수 중에서 끝에 계속되는 0의 개수는 2×5의 개수로 소인수분해 한다.

② 나머지 인수 중에서 배수이론으로 인수를 곱으로 쪼갠다.

③ 거듭제곱이 있는가를 확인한다.

④ 위와 같이 되지 않을 경우 소수로 직접 나누어보고 곱으로 쪼개기 방식이나 밑으로 계속 나누어가기 방식을 취한다.

(1) ① $90=\boxed{10}\times9=\boxed{2}\times\boxed{5}\times\boxed{3}\times3=2\times3^2\times5$ ② $360=\boxed{10}\times36=10\times6\times6=2^3\times3^2\times5$

(2) ① $99=9\times11=3^2\times11$ ② $490=2\times5\times7^2$

유제 4

다음은 암산으로 소인수분해하고, 물음에 답하여라.

(1) $\square$에 알맞은 수를 넣고, 소인수의 곱으로 써라.

① $80=\square\times8$ ② $225=\square\times25$

(2) 소인수의 곱으로 써라.

① 270 ② 900

5. 약수 구하기

약수를 구하는 방법은 (1) **두 수의 곱 이용하기**, (2) 소인수 분해를 이용한 **표 만들기**, (3) **분배법칙**이용하기 등의 방법이 있으나 숫자가 작을 경우에는 (1), (2) 방법으로 쉽게 찾을 수 있으나 3600과 같이 큰 수의 경우에는 시간이 많이 걸린다. 따라서 12의 약수가 1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개가 어떻게 나오는 것인지의 원리를 파악하여 **분배법칙을 이용하는 방법이 약수의 개수와 약수의 합을 구하는 데 이해하기 쉬우므로 많이 이용**된다.

(1) 두 수의 곱 이용하기

$18=1\times18=2\times9=3\times6$이므로 18의 약수는 $1, 2, 3, 6, 9, 18$이다.

(2) 표 만들기

18을 소인수분해하면 $18=2\times3^2$이므로 18의 약수는 2의 약수와 3^2의 약수의 곱으로 다음과 같이 표를 만들어 구할 수 있다.

3×3 의 약수

2 의 약수

×	1	3	3×3
1	$1\times1=1$	$1\times3=3$	$1\times3^2=9$
2	$2\times1=2$	$2\times3=6$	$2\times3^2=18$

18 의 약수

따라서 18의 약수는 $1, 2, 3, 6, 9, 18$이다.

(3) 분배법칙

18을 소인수분해하면 $18=2\times3^2$이므로 2 의 약수 $1, 2$와 3×3의 약수 $1, 3, 3\times3$의 곱을 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 써서 나타낸다.

$(1+2)(1+3+9)=1+3+9+2+6+18$이므로 18의 약수는 $1, 2, 3, 6, 9, 18$이다.

$$(1+2)\times(1+3+9)=1+3+9+2+6+18$$

(1과 $1, 3, 9$의 곱에서 $1, 3, 9$를 구하고, 2와 $1, 3, 9$의 곱에서 $2, 6, 18$을 구한다.)

(참고) 다음과 같은 것을 분배법칙이라고 한다.

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

$(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$

(4) 약수의 개수

자연수 A가 $A=a^m\times b^n$ (단, a, b는 서로 다른 소수)로 소인수 분해될 때, A의 약수의 개수는 $(m+1)\times(n+1)$ 개이다.

(예) $54=2\times3^3$ 이므로 54 의 약수의 개수는 $(1+1)\times(3+1)=2\times4=8$ (개)

5 선행예제

원리탐구

두 수의 곱을 이용하여 24 의 약수를 구하는 방법이다. $\square$안 숫자를 넣고 약수를 써라.

(1) $24=\boxed{1}\times\square=\boxed{2}\times\square=\boxed{3}\times\square=\square\times\square$

(2) 24 의 약수:

풀이 답: 풀이참조

(1) $24=\boxed{1}\times\boxed{24}=\boxed{2}\times\boxed{12}=\boxed{3}\times\boxed{8}=\boxed{4}\times\boxed{6}$

(2) 24 의 약수: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

유제 5

두 수의 곱 이용하기를 이용하여 다음 빈 $\square$를 채우고, 약수를 구하여라.

(1) $21=\square\times\square=\square\times\square$ 21 의 약수:__________

(2) $55=$ 55의 약수:__________

(3) $28=$ 28 의 약수:__________

6 선행예제

소인수 분해를 이용한 표를 만들어 약수를 구하여라.

(1) 24를 소인수 분해하여라.

(2) 다음 표를 완성 하여라.

$\times$	1	2	$2\times2=4$	$2\times2\times2=8$
1	1			
3			12	

(3) 24의 약수:

풀이 답: 풀이참조

(1) $24=2\times2\times2\times3$

(2) 다음 표를 완성 하여라.

$\times$	1	2	$2\times2=4$	$2\times2\times2=8$
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24

(3) 24의 약수: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

유제 6

소인수 분해를 이용한 표 만들어 약수를 구하려고 한다. 다음 빈 □에 소수를 넣고, 표의 빈칸을 채워라.

(1) $45=\square\times\square\times\square$

(2) 다음 표를 완성 하여라.

$\times$			

(3) 45의 약수:________________

7 선행예제

자연수 a에 대하여 $\langle a\rangle=(a$의 약수의 개수$)$라고 할 때, $\langle a\rangle=8$인 a 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

풀이 답: 24

$\langle a\rangle=(a$의 약수의 개수$)=8$이므로 약수의 개수가 8인 자연수 a를 찾는다.

자연수 A가 $A=a^m\times b^n$으로 소인수분해 될 때, A의 약수의 개수는 $(m+1)\times(n+1)$개임을 이용하면 $8=1\times8=7+1$, $8=2\times4=(1+1)\times(3+1)$, $8=2\times2\times2=(1+1)\times(1+1)\times(1+1)$이므로 가장 작은 자연수 a는 2^7, $2^3\times3$, $2\times3\times5$ 중에 있다.

이 중 가장 작은 수는 $2^3\times3=24$이다.

유제 7

약수가 12개인 가장 작은 자연수를 구하여라.

종합문제

1. 제곱수를 이용하여 1이상 50이하의 소수를 모두 찾아라.

2. 다음 수를 제곱수를 이용하여 소수와 합성수를 구별하여보아라.

(1) 61　　(2) 83

(3) 65　　(4) 91

(5) 209　　(6) 79

3. 다음 수를 밑으로 계속 나누어가기 방법으로 소인수분해하고, 소인수의 곱으로 써라.

(1) 24　　(2) 50

(3) 48　　(4) 35

(5) 266　　(6) 200

4. 다음은 암산으로 소인수분해 하여라.

(1) 60　　(2) 120

(3) 72　　(4) 48

(5) 360　　(6) 2400

5. 다음 중 $2\times3^3\times7$의 약수가 아닌 것은?

① 2×3　　② $2^2\times3$　　③ $2\times3^2\times7$

④ 2×7　　⑤ $2\times3^3\times7$

6. 160의 약수의 개수를 구하여라.

7. $1\times2\times3\times\cdots\times49\times50$을 소인수분해 했을 때, 다음을 구하여라.

(1) 소인수 2의 지수 (2) 소인수 5의 지수

8. 다음 물음에 답하여라.

(1) 1287은 연속한 세 홀수의 곱이다. 이 연속한 세 홀수를 구하여라.

(2) 곱해서 144가 되고, 차가 10이 되는 두 자연수를 구하여라.

9. 다음과 같은 규칙으로 빈 사각형 안에 주어진 수를 써넣어라.

(1) 2, 3, 4, 5 넣기(힌트: 5을 찾는다.)

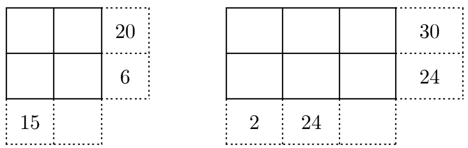
(2) 1, 2, 3, 4, 5, 6 넣기(힌트: 5, 1을 찾는다.)(주의: $6=1\times6=2\times3$, $12=2\times6=3\times4$)

[규칙]

① 사각형의 오른쪽에 있는 점선 안의 수는 가로줄에 있는 칸의 수의 곱을 나타낸다.

② 사각형의 아래쪽에 있는 점선 안의 수는 세로줄에 있는 칸의 수의 곱을 나타낸다.

③ 주어진 수는 한번 씩 만 들어간다. 따라서 주어진 수를 꼭 확인하여야 한다.



(1) (2)

10. 다음은 어떤 수의 약수인가?

1, 3, 3^2, 3^3, 3^4

① 45 ② 50 ③ 81 ④ 141 ⑤ 162

11. $2^4\times\square$의 약수의 개수가 15개일 때, 다음 중 $\square$안의 수로 알맞은 것은?

① 4 ② 5 ③ 9 ④ 15 ⑤ 21

12. 자연수 $N=2^x\times3^3\times5^y$의 약수의 개수는 80개이다. $x-y$의 값 중 가장 작은 값은?

① -10 ② -8 ③ -7 ④ -1 ⑤ 1

13. 540 을 가능한 한 작은 자연수로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 나누어야 할 자연수는?

① 5 ② 6 ③ 15 ④ 24 ⑤ 28

14. 자연수 a의 약수의 개수를 $f(a)$라고 나타낼 때, $f(120)\times f(x)=96$을 만족하는 가장 작은 수 x를 구하여라.

15. 220의 모든 약수의 합을 구하여라.

16. 다음 중 옳은 것은?

① 37 은 소수이다.
② 모두 자연수는 소수들의 곱으로 나타낼 수 있다.
③ 소수 중에 가장 작은 소수는 1 이다.
④ 짝수인 소수는 없다.
⑤ 30 은 소인수가 2 개다.
⑥ 자연수는 소수와 합성수로 나누어진다.

17. 다음 수들 중 약수의 개수가 가장 많은 수는 어느 것인가?

① 45 ② $5^2\times7$ ③ 32 ④ $2^2\times3^2$ ⑤ 75

18. 다음 수 중에서 약수의 개수가 나머지 넷과 다른 것은?

① 400 ② 11^{11} ③ 96 ④ $2\times3\times5^2$ ⑤ $2^3\times7^2$

19. 다음 중 소인수분해가 옳은 것은?

① $48=4^2\times3$　　② $54=2^2\times3^2$　　③ $64=2^5$

④ $71=1\times71$　　⑤ $100=2^2\times5^2$

20. 다음 중 옳은 것 2개를 골라라.

① 소수는 모두 홀수이다.

② 1부터 10까지 자연수 중에서 2 또는 3으로 나누어떨어지지 않는 수는 모두 소수이다.

③ 소수의 제곱인 수는 약수가 3개다.

④ 121의 약수의 개수는 3개다.

⑤ 모든 자연수는 약수가 2개 이상이다.

생활과 수학

1. 생존을 위한 매미의 선택, 소수!

여름철 주변에서 흔히 볼 수 있는 참매미와 유지매미는 산란한 지 7년째에 성충이 되고, 늦털매미는 5년째에 성충이 된다고 한다. 또 북아메리카의 매미 중에는 이 기간이 13년인 것과 17년인 것도 있다고 한다.

(참매미)

(유지매미)

(늦털매미)

매미들이 성충이 되는 햇수인 $5, 7, 13, 17$의 공통된 특징은 무엇인가? 그것은 모두 소수란 점이다. 왜 하필 소수이어야 할까?

곤충학자의 연구에 따르면 매미가 성충이 되는 햇수가 소수인 이유는 새, 거미, 사마귀, 땅강아지와 같은 천적을 피하여 종족을 보존하기 위한 본능적인 선택의 결과라고 한다. 즉, 매미는 자신의 성장 기간을 천적의 성장기간과 달리하여 생존율을 높이는 것이다.

매미의 천적중 하나인 땅강아지의 성장 기간은 2 년이다. 만약 매미의 성장기간이 4년이라면 2와 4의 공배수는 4의 배수이므로 매미는 땅강아지와 성장기간마다 만나게 된다. 그러나 매미의 성장기간이 5년이라면 5와 2의 공배수는 10의 배수이므로 매미는 땅강아지와 10 년마다 만나게 되어 땅강아지에게 잡아먹힐 가능성이 훨씬 줄어든다.

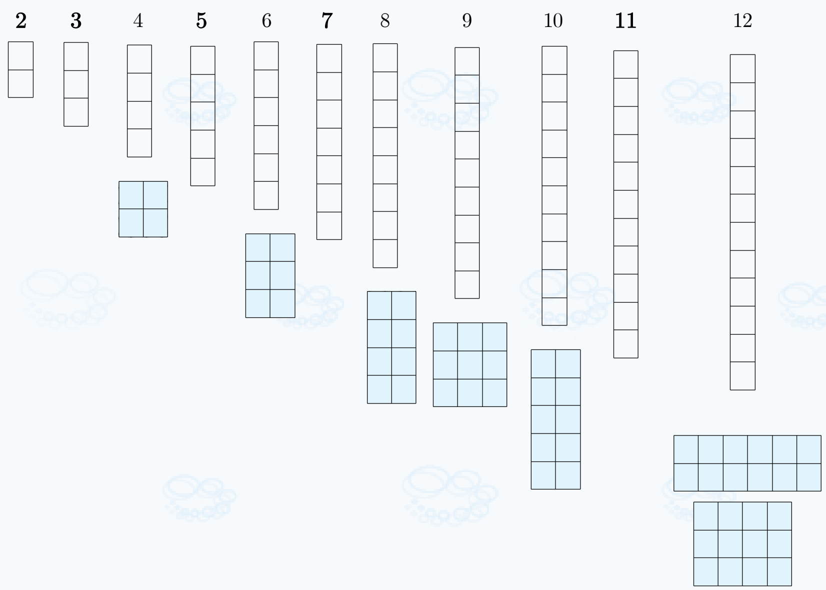
이와 같은 이유로 인해 학자들은 매미의 성장 기간이 3년, 5년이었다가 생존율을 높이기 위해서 13년, 17년으로 성장기간을 늘렸을 것이라고 추측하기도 한다.

또한 같이 경쟁을 해야 하는 다른 종의 매미와 생존 기간이 겹치는 기간이 짧아져서 보다 나은 환경에서 살 수 있기 때문이라는 설도 있다.

읽을거리

1. 사각형 속에 숨은 합성수와 소수, 제곱수

숫자와 그림을 연결시키면서 수학은 혁명적으로 발전했다.
수학적인 사고의 폭을 넓히는 가장 좋은 방법은 숫자와 그림을 연결시키는 것이다.
이것은 추상적인 상징을 눈에 보이는 형태로 이해하는 것을 의미한다.
좌뇌 영역에서 처리되는 숫자와 상징을 우뇌 영역에서 처리되는 그림과 이미지로 연결시키면서 뇌 전체가 활발히 움직이며 우리의 사고체계는 강력하게 활성화된다.
이렇게 어떤 추상적인 개념을 눈에 보이는 구체적인 형태로 나타내는 것을 '시각화' 라고 한다.
숫자와 그림을 연결시키는 가장 간단한 방법 중의 하나는 수를 도형의 넓이로 나타내는 것이다. 한 변의 길이가 1 인 정사각형 1 개는 1 을, 2 개는 2 를, 3 개는 3 을 나타낸다.
그냥 수에 그 수만큼의 정사각형을 대응하는 것이다. 너무나 단순해서 이걸로 뭘 할 수 있을까 싶지만 이 방법만으로도 성질을 알아내는 데 큰 도움을 얻을 수 있다.
2 에서 12 까지 수는 각각 넓이가 1 인 정사각형 2 개에서 12개까지에 해당한다. 그러면 정사각형들로 만들 수 있는 직사각형의 개수는 몇 개가 될까?
예를 들어 6 개의 정사각형으로는 1×6 의 직사각형과 2×3 의 직사각형, 두 개의 직사각형을 만들 수 있다. 다음 그림은 각 개수의 정사각형으로 만들 수 있는 직사각형을 직접 그린 것이다.



위 그림을 보면 2 에서 12까지 수를 두 가지로 나눌 수 있다.

한 가지 종류의 직사각형만 가능한 경우(2, 3, 5, 7, 11)와 두 가지이상의 직사각형이 가능한 수(4, 6, 8, 9, 10, 12)로 말이다.
그런데 이런 식으로 수를 분류하는 것을 예전에 어디선가 본 것 같은 느낌이 들지 않는가? 2, 3, 5, 7, 11 . 이 수들은 자기 자신과 1 로만 나누어떨어지는 수, 즉 소수(素數)라고 배웠다. 그리고 1 과 자기 자신 외에도 나누어떨어지는 수가 있는 수 (4, 6, 8, 9, 10, 12)를 합성수라고 배웠다.
두 가지의 직사각형을 만들 수 있는 수도 잘 살펴보면 다시 두 가지로 구분할 수 있다. 6 과 8 은 직사각형 모양만 가능한데, 4 와 9 는 직사각형 중에서도 모든 변의 길이가 같은 정사각형 모양이 가능하다. 흠, 그러고 보니 피타고라스가 4 와 9 를 '정사각형 숫자(square number)' 라고 불렀던 것이 생각난다.
우리는 정사각형 숫자라는 말보다는 똑같은 수를 두 번 곱했다는 뜻으로 '제곱수' 라고 부르지만 말이다.
직사각형의 넓이는 '가로×세로' 로 구할 수 있다. 바꿔서 말하면 가로와 세로는 그 직사각형 넓이의 약수인 것이다.
넓이가 2 인 직사각형은 1×2 (순서를 바꾼 2×1 도 있지만 방향을 돌리면 같은 것이다) 일 수밖에 없다. 약수가 1 과 2 , 즉 1 과 자기 자신뿐이다. 하지만 넓이가 6 인 직사각형은 1×6 과 2×3 두 가지가 있어서 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이다.
특히 $12=1\times12=2\times6=3\times4$이므로 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12 의 6개다.
따라서 $10=1\times10=2\times5$보다 일상생활에 편리하다.
특정한 넓이를 가진 직사각형을 만들어보면 그 넓이에 해당하는 수가 소수인지 합성수인지, 제곱수인지 쉽게 알 수 있다.
한 줄로 긴 직사각형만 가능하다면 소수이고, 여러 가지 다른 모양의 직사각형이 가능하다면 합성수이며, 정사각형 모양으로 만들 수 있다면 제곱수인 것이다.

[출처: 수학의 재미, 박종하 · 송명진 지음, 랜덤하우스, 수정]